



TUGAS AKHIR - SM0141501

**ANALISIS REDUKSI MODEL PADA SISTEM
LINIER WAKTU DISKRIT DENGAN METODE
HANKEL NORM APPROXIMATION**

MOHAMMAD KHOIRUL ROZIQ
NRP 06111440000074

Dosen Pembimbing:
Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si
Dr. Dieky Adzkiya, S.Si, M.Si

DEPARTEMEN MATEMATIKA
Fakultas Matematika Komputasi dan Sains Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2018

Halaman ini sengaja dikosongkan.



FINAL PROJECT - SM141501

**MODEL REDUCTION ANALYSIS OF
DISCRETE-TIME LINEAR SYSTEMS USING
HANKEL NORM APPROXIMATION**

MOHAMMAD KHOIRUL ROZIQ
NRP 06111440000074

Supervisors:

Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si

Dr. Dieky Adzkiya, S.Si, M.Si

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Faculty of Computations Mathematics and Data Sciences

Sepuluh Nopember Institute of Technology

Surabaya 2018

LEMBAR PENGESAHAN

ANALISIS REDUKSI MODEL PADA SISTEM LINIER WAKTU DISKRIT DENGAN METODE HANKEL NORM APPROXIMATION

MODEL REDUCTION ANALYSIS OF DESCRETE- TIME LINIER SYSTEMS USING HANKEL NORM APPROXIMATION

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada

Bidang Studi Matematika Terapan
Program Studi S-1 Departemen Matematika
Fakultas Matematika, Komputasi, dan Sains Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya


Oleh :


MOHAMMAD KHOIRUL ROZIQ
NRP. 0611144000074

Menyetujui,

Dosen Pembimbing II,

Dosen Pembimbing I,



Dr. Dieky Adzkiya, S.Si, M.Si.
NIP. 19830517 200812 1 003


Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si
NIP. 19730930 199702 1 001

Mengetahui,

Kepala Departemen Matematika
FMKSD ITS




Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT
NIP. 19700831 199403 1 003
Surabaya, Januari 2018

ANALISIS REDUKSI MODEL PADA SISTEM LINIER WAKTU DISKRIT DENGAN METODE *HANKEL NORM APPROXIMATION*

Nama Mahasiswa : MOHAMMAD KHOIRUL ROZIQ
NRP : 06111440000074
Departemen : Matematika FMKSD-ITS
Pembimbing : 1. Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si
2. Dr. Dieky Adzkiya, S.Si, M.Si

Abstrak

Dalam permasalahan riil dapat direpresentasikan ke dalam suatu sistem yang dapat mewakili kondisi yang sebenarnya. Pada umumnya didapatkan sistem yang mempunyai orde besar. Pada sistem yang mempunyai orde besar mengakibatkan kesulitan dalam hal analisa sistem dan waktu komputasi yang lama. Oleh karena itu dibutuhkan sistem yang lebih sederhana untuk mempermudah melakukan analisa sistem. Penyederhanaan sistem yang mempunyai orde besar menjadi sistem dengan mempunyai orde kecil disebut proses reduksi model. Salah satu metode reduksi model adalah Hankel Norm Approximation (HNA). Pada penelitian ini dilakukan proses reduksi model dengan menggunakan metode Hankel Norm Approximation. Proses reduksi model ini diawali dengan pembentukan sistem awal yang stabil, terkendali dan teramati. Kemudian dibentuk suatu sistem setimbang. Setelah itu dilakukan reduksi model dengan HNA. Hasil simulasi dengan HNA yang didapatkan bahwa sistem tereduksi dengan HNA memiliki performansi dan sifat yang sama dengan sistem awal, yaitu sifat stabil, terkendali, dan teramati. Kemudian berdasarkan hasil simulasi didapatkan bahwa metode HNA cocok digunakan pada sistem dengan

frekuensi yang tinggi dan menghasilkan waktu yang cepat.

Kata-kunci: *Sistem, Reduksi model, Hankel Norm
Approximation*

MODEL REDUCTION ANALYSIS OF DISCRETE-TIME LINEAR SYSTEMS USING HANKEL NORM APPROXIMATION

Name : MOHAMMAD KHOIRUL ROZIQ
NRP : 06111440000074
Department : Mathematics FMKSD-ITS
Supervisors : 1. Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si
2. Dr. Dieky Adzkiya, S.Si, M.Si

Abstract

Real world problems could be represented to the system that could represent the real condition. Usually, we obtain a system that has large order. Large order system causes difficulties in analyze and low computation time. Thus, a simplified system is needed for easier system analysis. Simplification of a large order system into the smaller order system is called model reduction. One of the model reduction method is Hankel Norm Approximation(HNA). In this research, model reduction was conducted using Hankel Norm Approximation. This model reduction method starts with formed a stable, controllable, and observable initial system. Then a balanced system will be formed as well. HNA will be done to the balanced model afterwards. The obtained simulation result using HNA has the same performance and properties with the initial system, which are stability, controllability, observability. Besides that, HNA model reduction suitable for use at high frequencies and get a fast computation time.

Keywords: *System, Reduction model, Hankel Norm Approximation*

Halaman ini sengaja dikosongkan.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Alhamdulillahirobbil'aalamiin, segala puji dan syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT yang telah memberikan limpahan rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul

"ANALISIS REDUKSI MODEL PADA SISTEM LINIER WAKTU DISKRIT DENGAN METODE HANKEL NORM APPROXIMATION"

sebagai salah satu syarat kelulusan Program Sarjana Departemen Matematika FMKSD Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.

Tugas Akhir ini dapat terselesaikan dengan baik berkat bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan ucapan terima kasih dan penghargaan kepada:

1. Bapak Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT selaku Kepala Departemen Matematika ITS yang telah memberikan dukungan dan motivasi selama perkuliahan hingga terselesaikannya Tugas Akhir ini.
2. Bapak Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si dan Bapak Dr. Dieky Adzkiya, S.Si, M.Si selaku dosen pembimbing atas segala bimbingan dan motivasinya kepada penulis sehingga dapat terselesaikan dengan baik.
3. Bapak dan Ibu dosen penguji atas semua saran dan masukan yang telah diberikan.

4. Bapak Drs. Iis Herisman, M.Si selaku koordinator Tugas Akhir.
5. Ibu Dr. Dra. Mardlijah, M.T selaku dosen wali yang telah memberikan arahan akademik selama penulis menempuh pendidikan di Departemen Matematika FMKSD ITS.
6. Bapak dan Ibu dosen serta para staf Jurusan Matematika ITS yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu.
7. Keluarga tercinta yang selalu mendoakan saya dan keluarga AKSIOM14 yang selalu memberikan semangat lebih khususnya Tri Ilma Sari yang selalu memberikan dukungan dan dorongan agar bisa menyelesaikan Tugas Akhir ini.

Penulis juga menyadari bahwa dalam pengerjaan ini masih terdapat kekurangan. Oleh sebab itu, kritik dan saran yang bersifat membangun sangat penulis harapkan demi kesempurnaan Tugas Akhir ini. Akhirnya, penulis berharap semoga penulisan ini dapat bermanfaat bagi banyak pihak.

Surabaya, Januari 2018

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i	
ABSTRAK	v	
ABSTRACT	vii	
KATA PENGANTAR	ix	
DAFTAR ISI	xi	
DAFTAR GAMBAR	xiii	
DAFTAR TABEL	xvii	
DAFTAR SIMBOL	xix	
BAB I	Pendahuluan	1
1.1	Latar Belakang Masalah	1
1.2	Rumusan Masalah	3
1.3	Batasan Masalah	3
1.4	Tujuan	4
1.5	Manfaat	4
1.6	Sistematika Penulisan	5
BAB II	TINJAUAN PUSTAKA	7
2.1	Penelitian Terdahulu	7
2.2	Landasan Teori	8
2.2.1	Sistem Linier Waktu Diskrit	8
2.2.2	Sifat-Sifat Sistem	9
2.2.3	Gramian Keterkendalian dan Gramian Keteramatan	12
2.2.4	Sistem Setimbang	13
2.2.5	Transformasi Z	15

BAB III	METODE PENELITIAN	17
3.1	Tahapan Penelitian	17
3.2	Diagram Alir Metodologi Penelitian	18
BAB IV	ANALISIS DAN PEMBAHASAN	21
4.1	Sistem Awal	21
4.1.1	Kestabilan dari Segi Nilai Karakteristik	21
4.1.2	Keterkendalian	27
4.1.3	Keteramatan	31
4.2	Sistem Setimbang	36
4.3	Reduksi Model dengan HNA	45
4.3.1	Pembentukan Sistem Tereduksi	45
4.4	Simulasi	55
4.5	Simulasi Perbandingan Metode Reduksi Model	98
4.6	Sistem Konduksi Panas	111
4.6.1	Diskritisasi Model Konduksi Panas pada Batang Logam	111
4.6.2	Sistem Awal Sistem Konduksi Panas ..	116
BAB V	PENUTUP	135
5.1	Kesimpulan	135
5.2	Saran	136
DAFTAR PUSTAKA		137
LAMPIRAN A	Sistem Awal Matriks Diagonal	139
LAMPIRAN B	Sistem Awal Matriks Segitiga Atas	143
LAMPIRAN C	Sistem Awal Matriks Segitiga Bawah	147
LAMPIRAN D	Listing Program	151
BIODATA PENULIS		165

DAFTAR GAMBAR

Gambar 3.1	Diagram Alir Metodologi Penelitian . . .	19
Gambar 4.1	Frekuensi Respon antara Sistem Stabil (A_s, B_s, C_s, D_s) dan Sistem Setimbang ($\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s$)	62
Gambar 4.2	Frekuensi Response antara Sistem Awal dan Sistem Tereduksi Orde 5 dengan HNA	65
Gambar 4.3	Frekuensi Respon antara Sistem Stabil (A_s, B_s, C_s, D_s) dan Sistem Setimbang ($\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s$)	73
Gambar 4.4	Frekuensi Response antara Sistem Awal dan Sistem Tereduksi Orde 6 dengan HNA	76
Gambar 4.5	Frekuensi Respon antara Sistem Stabil (A_s, B_s, C_s, D_s) dan Sistem Setimbang ($\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s$)	84
Gambar 4.6	Frekuensi Response antara Sistem Awal dan Sistem Tereduksi Orde 7 dengan HNA	87
Gambar 4.7	Frekuensi Respon antara Sistem Stabil (A_s, B_s, C_s, D_s) dan Sistem Setimbang ($\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s$)	94
Gambar 4.8	Frekuensi Response antara Sistem Awal dan Sistem Tereduksi Orde 4 dengan HNA	97

Gambar 4.9	Frekuensi Response antara Sistem Awal dan Sistem Tereduksi Orde 5 dengan HNA, dan BT	100
Gambar 4.10	Error Sistem Tereduksi Orde 5	101
Gambar 4.11	Frekuensi Response antara Sistem Awal dan Sistem Tereduksi Orde 6 dengan HNA dan BT	103
Gambar 4.12	Error Sistem Tereduksi Orde 6	104
Gambar 4.13	Frekuensi Response antara Sistem Awal dan Sistem Tereduksi Orde 7 dengan HNA dan BT	106
Gambar 4.14	Error Sistem Tereduksi Orde 7	107
Gambar 4.15	Frekuensi Response antara Sistem Awal dan Sistem Tereduksi Orde 4 dengan HNA, SPA dan BT	109
Gambar 4.16	Error Sistem Tereduksi Orde 4	110
Gambar 4.17	Perambatan Panas Pada Batang	111
Gambar 4.18	Isolasi Batang Secara Sempurna	114
Gambar 4.19	Frekuensi Respon antara Sistem Stabil (A_s, B_s, C_s, D_s) dan Sistem Setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$	123
Gambar 4.20	Frekuensi Response antara Sistem Awal dan Sistem Tereduksi Orde 4 dengan HNA	127
Gambar 4.21	Frekuensi Response antara Sistem Awal dan Sistem Tereduksi Orde 4 dengan HNA, BT, dan SPA	128
Gambar 4.22	Error Sistem Tereduksi Orde 4	129
Gambar 4.23	Frekuensi Response antara Sistem Awal dan Sistem Tereduksi Orde 7 dengan HNA	132

Gambar 4.24 Frekuensi Response antara Sistem Awal dan Sistem Tereduksi Orde 7 dengan HNA, BT, dan SPA	133
Gambar 4.25 Error Sistem Tereduksi Orde 7.....	134

Halaman ini sengaja dikosongkan.

DAFTAR TABEL

Tabel 4.1	Nilai Eigen dari Sistem Awal (A, B, C, D)	56
Tabel 4.2	Nilai Singular Hankel	60
Tabel 4.3	Nilai Eigen dari Sistem Setimbang	61
Tabel 4.4	Syarat Orde Tereduksi dengan HNA Matriks Diagonal	63
Tabel 4.5	Nilai Eigen dari Sistem Tereduksi Orde 5	64
Tabel 4.6	Nilai Error dari Sistem Tereduksi Orde 5.	66
Tabel 4.7	Nilai Eigen dari Sistem Awal (A, B, C, D)	67
Tabel 4.8	Nilai Singular Hankel	71
Tabel 4.9	Nilai Eigen dari Sistem Setimbang	72
Tabel 4.10	Syarat Orde Tereduksi dengan HNA Matriks Segitiga Atas	73
Tabel 4.11	Nilai Eigen dari Sistem Tereduksi Orde 6	75
Tabel 4.12	Nilai Error dari Sistem Tereduksi Orde 6.	76
Tabel 4.13	Nilai Eigen dari Sistem Awal (A, B, C, D)	78
Tabel 4.14	Nilai Singular Hankel	82
Tabel 4.15	Nilai Eigen dari Sistem Setimbang	83
Tabel 4.16	Syarat Orde Tereduksi dengan HNA Matriks Segitiga Bawah	85
Tabel 4.17	Nilai Eigen dari Sistem Tereduksi Orde 7	86
Tabel 4.18	Nilai Error dari Sistem Tereduksi Orde 7.	88
Tabel 4.19	Nilai Eigen dari Sistem Awal (A, B, C, D)	89
Tabel 4.20	Nilai Singular Hankel	92
Tabel 4.21	Nilai Eigen dari Sistem Setimbang	93
Tabel 4.22	Syarat Orde Tereduksi dengan HNA Tridiagonal	95
Tabel 4.23	Nilai Eigen dari Sistem Tereduksi Orde 4	96
Tabel 4.24	Nilai Error dari Sistem Tereduksi Orde 4.	98

Tabel 4.25 Syarat Orde Tereduksi dengan BT	
Matriks Diagonal	98
Tabel 4.26 Syarat Orde Tereduksi dengan SPA	
Matriks Diagonal	99
Tabel 4.27 Error dari Sistem Tereduksi Orde 5	101
Tabel 4.28 Syarat Orde Tereduksi dengan BT	
Matriks Segitiga Atas	102
Tabel 4.29 Syarat Orde Tereduksi dengan SPA	
Matriks Segitiga Atas	102
Tabel 4.30 Error dari Sistem Tereduksi Orde 6	104
Tabel 4.31 Syarat Orde Tereduksi dengan BT	
Matriks Segitiga Bawah	105
Tabel 4.32 Syarat Orde Tereduksi dengan SPA	
Matriks Segitiga Bawah	105
Tabel 4.33 Error dari Sistem Tereduksi Orde 7	107
Tabel 4.34 Syarat Orde Tereduksi dengan BT	
Matriks Tridiagonal	108
Tabel 4.35 Syarat Orde Tereduksi dengan SPA	
Matriks Tridiagonal	108
Tabel 4.36 Error dari Sistem Tereduksi Orde 4	110
Tabel 4.37 Nilai Eigen dari Sistem Awal (A, B, C, D)	117
Tabel 4.38 Nilai Singular Hankel	121
Tabel 4.39 Nilai Eigen dari Sistem Setimbang	122
Tabel 4.40 Syarat Orde Tereduksi dengan HNA	
Sistem Konduksi Panas	124
Tabel 4.41 Syarat Orde Tereduksi dengan BT	
Sistem Konduksi Panas	124
Tabel 4.42 Syarat Orde Tereduksi dengan SPA	
Sistem Konduksi Panas	125
Tabel 4.43 Nilai Eigen dari Sistem Tereduksi Orde 4	126
Tabel 4.44 Error dari Sistem Tereduksi Orde 4	129
Tabel 4.45 Nilai Eigen dari Sistem Tereduksi Orde 7	131
Tabel 4.46 Error dari Sistem Tereduksi Orde 7	134

Daftar Simbol

x_k	Variabel keadaan pada sistem diskrit.
u_k	Vektor masukan pada sistem diskrit.
y_k	Vektor keluaran pada sistem diskrit.
A, B, C, D	Matriks-matriks konstan sistem diskrit dengan ukuran yang bersesuaian dan diasumsikan matriks A non singular.
λ	Nilai eigen.
M_c	Matriks keterkendalian.
M_o	Matriks keteramatan.
A_s, B_s, C_s, D_s	Sistem stabil asimtotik, terkendali, teramati.
W	Gramian keterkendalian.
M	Gramian keteramatan.
T	Matriks transformasi non singular.
Σ	Gramian kesetimbangan.
$\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s$	Sistem setimbang waktu diskrit.
\tilde{W}	Gramian keterkendalian sistem $\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s$.
\tilde{M}	Gramian keteramatan sistem $\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s$.
σ_i	Nilai singular Hankel.
\tilde{x}_{rk}	Variabel keadaan sistem tereduksi.
\tilde{u}_{rk}	Vektor masukan pada sistem tereduksi.
\tilde{y}_{rk}	Vektor keluaran sistem tereduksi.
$\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$	Sistem tereduksi dengan HNA.
G_s	Fungsi transfer sistem stabil.
G_{sr}	Fungsi transfer sistem tereduksi dengan HNA.
$ \cdot $	Nilai absolut

Halaman ini sengaja dikosongkan.

BAB I

PENDAHULUAN

Pada bab ini dibahas latar belakang yang mendasari penulisan Tugas Akhir. Kemudian didalamnya juga mencakup permasalahan pada topik Tugas Akhir. Kemudian dirumuskan menjadi permasalahan yang diberikan batasan-batasan untuk membatasi pembahasan pada Tugas Akhir ini.

1.1 Latar Belakang Masalah

Pada zaman modern seperti sekarang, dunia sains dan teknologi semakin berkembang. Permasalahan yang muncul pun semakin banyak. Dewasa ini matematika memiliki peran yang sangat penting dalam menyelesaikan permasalahan-permasalahan yang muncul. Salah satunya dengan menggunakan pemodelan matematika. Dalam pembentukan model matematika yang diharapkan menyerupai fenomena-fenomena yang terdapat di alam didapatkan variabel keadaan (*state*) yang banyak sehingga apabila model matematika dibentuk dalam sebuah sistem maka didapatkan sistem mempunyai orde yang besar. Tentunya hal ini mempengaruhi waktu komputasi karena semakin besar ukuran sistem, waktu komputasi yang dibutuhkan semakin lama. Selain waktu komputasi yang lama, ukuran sistem yang besar juga berdampak pada kesulitan dalam hal analisis, optimasi, serta desain kendali. Oleh karena itu, dibutuhkan penyederhanaan sistem yang berorde besar agar sistem tersebut memiliki orde yang lebih kecil tanpa kesalahan yang signifikan. Penyederhanaan sistem inilah yang dimaksud reduksi model[1]. Beberapa penelitian mengenai analisis

reduksi model telah dilakukan sebelumnya, baik untuk sistem linear waktu diskrit maupun kontinu[2].

Hingga saat ini telah banyak dikembangkan beberapa metode reduksi model, diantaranya adalah metode pemotongan setimbang(*Balanced Truncation/BT*), metode aproksimasi perturbasi singular(*Singular Perturbation Approximation/SPA*). Sebelum dilakukan reduksi model dengan kedua metode tersebut, tahapan pertama yang harus dilakukan yaitu melakukan analisis ketabilan, keterkendalian, dan keteramatan dari sistem tersebut. Kemudian dibentuk suatu sistem setimbang yang gramian keterkendalian dan gramian keteramatan mempunyai nilai yang sama. Kemudian setelah terbentuk sistem setimbang dilakukan reduksi model. Pada reduksi model dengan metode SPA, semua variabel keadaan dari sistem setimbang dipartisi menjadi mode cepat dan lambat. Variabel keadaan yang bersesuaian dengan nilai singular Hankel yang bernilai kecil didefinisikan sebagai mode cepat. Sedangkan variabel keadaan yang bersesuaian dengan nilai singular Hankel yang bernilai lebih besar didefinisikan sebagai mode lambat. Singular hankel merupakan nilai yang merepresentasikan pengaruh setiap variabel keadaan terhadap sistem. Selanjutnya, model tereduksi diperoleh dengan mengambil kecepatan dari mode cepat sama dengan nol[3]. Sedangkan pada reduksi model dengan *balanced truncation(BT)*, semua variabel keadaan dari sistem setimbang dipartisi menjadi mode cepat dan lambat. Variabel keadaan yang bersesuaian dengan nilai singular Hankel yang bernilai kecil didefinisikan sebagai mode cepat. Sedangkan variabel keadaan yang bersesuaian dengan nilai singular Hankel yang bernilai lebih besar didefinisikan sebagai mode lambat. Selanjutnya, model tereduksi diperoleh dengan menghilangkan kecepatan dari mode cepat[3].

Berdasarkan latar belakang tersebut, pada tugas akhir

ini dilakukan reduksi model dengan menggunakan metode yang lain yaitu metode *Hankel Norm Approximation*. Dengan metode *Hankel Norm Approximation* dilakukan penyederhanaan sistem sehingga didapatkan sistem tereduksi yang memiliki orde kecil. Sistem tereduksi tersebut diharapkan lebih mendekati sistem awal tetapi waktu komputasi perhitungan yang lebih cepat. Selanjutnya dilakukan analisis perbandingan sifat-sifat antara sistem tereduksi dengan sistem awal. Untuk mendukung hasil analisis maka dalam tugas akhir ini dilakukan simulasi studi kasus pada sistem konduksi panas.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, rumusan masalah dalam tugas akhir yaitu :

1. Bagaimana proses reduksi model dengan metode Hankel Norm Approximation?
2. Bagaimana analisis sifat-sifat sistem tereduksi yang didapatkan dari hasil reduksi model dengan metode Hankel Norm Approximation?
3. Bagaimana simulasi reduksi model dengan HNA pada matriks A yang berbeda?
4. Bagaimana analisis hasil simulasi reduksi model dengan HNA mengenai akurasi dan waktu komputasi?

1.3 Batasan Masalah

Berdasarkan rumusan masalah di atas, batasan masalah dari Tugas Akhir ini adalah:

1. Sistem yang digunakan adalah sistem linier diskrit waktu *invariant*.
2. Sistem yang dibahas merupakan sistem yang stabil, terkendali, dan teramati.
3. Studi kasus yang digunakan adalah konduksi panas.

1.4 Tujuan

Adapun tujuan Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut :

1. Mendapatkan proses reduksi model dengan metode Hankel Norm Approximation.
2. Mendapatkan analisis sifat-sifat sistem tereduksi yang didapatkan dari hasil reduksi model dengan metode Hankel Norm Approximation.
3. Mendapatkan simulasi reduksi model dengan HNA pada matriks A yang berbeda.
4. Mendapatkan analisis hasil simulasi reduksi model dengan HNA mengenai akurasi dan waktu komputasi.

1.5 Manfaat

Adapun manfaat Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut :

1. Sebagai suatu bentuk kontribusi dalam pengembangan ilmu matematika terapan.
2. Memberikan informasi mengenai penerapan reduksi model pada model matematika yang memiliki orde besar sehingga dapat mempermudah penghitungan dan analisis.
3. Sebagai literatur penunjang bagi mahasiswa yang menempuh jenjang sarjana.

1.6 Sistematika Penulisan

Penulisan disusun dalam lima bab, yaitu:

1. BAB I PENDAHULUAN

Bab ini berisi tentang gambaran umum dari penulisan yang meliputi latar belakang, rumusan masalah, Batasan masalah, tujuan, manfaat, dan sistematika penulisan.

2. BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Bab ini membahas landasan teori yang mendasari penulisan Tugas Akhir. Didalamnya mencakup penelitian terdahulu, sistem linier waktu diskrit beserta analisis sifat-sifat pada sistem dan metode untuk mereduksi model pada sistem.

3. BAB III METODE PENELITIAN

Bab ini menjelaskan langkah-langkah yang digunakan dalam penyelesaian masalah pada Tugas Akhir. Disamping itu, dijelaskan pula prosedur dan proses pelaksanaan tiap-tiap langkah yang dilakukan dalam menyelesaikan Tugas Akhir.

4. BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dijelaskan secara detail mengenai sifat-sifat sistem, pembentukan sistem setimbang dan analisisnya, pembentukan sistem tereduksi dan analisisnya, serta simulasi.

5. BAB V PENUTUP

Bab ini berisi kesimpulan akhir yang diperoleh dari analisis dan pembahasan pada bab sebelumnya serta saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

Halaman ini sengaja dikosongkan.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini dibahas landasan teori yang mendasari penulisan Tugas Akhir. Didalamnya mencakup penelitian terdahulu, sistem linier waktu diskrit beserta analisis sifat-sifat pada sistem dan metode untuk mereduksi model pada sistem.

2.1 Penelitian Terdahulu

Masalah waktu komputasi sangat dipengaruhi oleh besarnya ukuran sistem. Semakin besar ukuran sistem, maka semakin besar pula waktu komputasi yang dibutuhkan. Oleh karena itu, didalam aplikasi sangat diperlukan untuk menyederhanakan suatu sistem yaitu dengan cara membentuk sistem yang lebih sederhana tanpa kesalahan yang signifikan. Sistem pengganti yang lebih sederhana ini selalu diinginkan dalam setiap aplikasi karena mempunyai ukuran yang lebih kecil daripada sistem semula dan masih mempertahankan sifat-sifat sistem semula. Sistem pengganti biasa dikenal dengan model tereduksi. Waktu komputasi pada model tereduksi lebih kecil daripada waktu komputasi pada sistem semula. Modifikasi untuk mengganti sistem yang berukuran besar dengan dengan sistem yang lebih sederhana tanpa kesalahan yang signifikan disebut dengan reduksi model. Gregoriadis membahas syarat perlu dan cukup untuk eksistensi solusi permasalahan model reduksi H_∞ untuk waktu kontinu dan diskrit[1].

Pada tahun 2016, telah dilakukan penelitian tentang analisis reduksi model pada sistem linier waktu diskrit tak

stabil dengan metode pemotongan setimbang (*Balanced Truncation/BT*). Sistem dibuat secara sebarang sehingga menghasilkan sistem yang tak stabil. Hasil penelitian menunjukkan bahwa berdasarkan analisis sistem, terlihat bahwa model tereduksi memiliki sifat yang sama dengan sistem awal. Hasil simulasi dari frekuensi respons antara sistem awal dan sistem tereduksi, terlihat bahwa karakteristik sistem awal dan sistem tereduksi hampir menunjukkan kesamaan dan dari perbandingan error antara sistem awal dan sistem tereduksi terlihat bahwa semakin kecil variabel yang direduksi akan memiliki error semakin kecil[3].

Pada tahun 2017, telah dilakukan penelitian tentang analisis reduksi model pada sistem linier waktu diskrit tak stabil dengan metode aproksimasi perturbasi singular(*Singular Perturbation Approximation/SPA*). Sistem dibuat secara sebarang sehingga menghasilkan sistem yang tak stabil. Hasil penelitian menunjukkan bahwa berdasarkan analisis sistem, terlihat bahwa model tereduksi memiliki sifat yang sama dengan sistem awal. Hasil simulasi dari frekuensi respon antara sistem awal dan sistem tereduksi, terlihat bahwa karakteristik sistem awal dan sistem tereduksi untuk yang orde kecil cenderung sama pada saat frekuensi rendah tetapi cenderung berbeda pada frekuensi tinggi[2].

2.2 Landasan Teori

2.2.1 Sistem Linier Waktu Diskrit

Diberikan suatu sistem linear waktu diskrit sebagai berikut:[5]

$$\begin{cases} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k \\ y_k &= Cx_k + Du_k \end{cases} \quad (2.2.1)$$

dengan,

$x_k \in \mathbb{R}^n$:variabel keadaan pada waktu k,

$u_k \in \mathbb{R}^m$:vektor masukan deterministik pada waktu k,

Untuk selanjutnya sistem pada persamaan (2.2.1) dinyatakan sebagai Sistem (A, B, C, D) , dengan A, B, C, D masing-masing adalah matriks-matriks konstan dengan ukuran yang bersesuaian dan diasumsikan A merupakan matriks non singular.

Untuk menggambarkan perilaku dari suatu sistem maka dapat dilihat dari fungsi transfernya. Fungsi transfer dari sistem (A, B, C, D) dapat dinotasikan sebagai berikut :[5]

$$G(z) = C(zI - A)^{-1}B + D \quad (2.2.2)$$

2.2.2 Sifat-Sifat Sistem

Sifat-sifat dari suatu sistem meliputi tiga hal yaitu kestabilan, keterkendalian dan keteramatan.

Kestabilan dari Segi Nilai Karakteristik

Definisi 2.2.1. [5]

Diberikan sistem linear diskrit sesuai dengan Persamaan (2.2.1). Misalkan x_e disebut titik setimbang.

- i. Titik setimbang x_e dikatakan stabil bila untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga untuk setiap solusi x_k yang memenuhi $\|x_0 - x_e\| \leq \delta$ maka berlaku $\|x_k - x_e\| \leq \varepsilon$ untuk setiap $k \geq 0$.
- ii. Titik setimbang x_e dikatakan stabil asimtotik jika x_e stabil dan bila terdapat $\delta_1 > 0$ sedemikian rupa sehingga untuk setiap solusi x_k yang memenuhi $\|x_0 - x_e\| \leq \delta_1$ maka berlaku $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x_e\| = 0$.

Secara istilah, sistem dikatakan stabil berarti bahwa setiap solusinya tetap berada di persekitaran titik setimbang. Sedangkan stabil asimtotik berarti bahwa setiap solusinya

konvergen ke titik setimbang. Tak stabil berarti bahwa untuk setiap solusinya yang pada awalnya berada di persekitaran titik setimbang kemudian malah menjauhi titik setimbang. Berdasarkan definisi (2.2.1) didapatkan teorema kestabilan sistem (A, B, C, D) adalah sebagai berikut.

Teorema 2.2.1[5]

Sistem linear diskrit adalah stabil asimtotik jika dan hanya jika $|\lambda_i(A)| < 1$ untuk $i = 1, \dots, n$ dengan $\lambda_i(A)$ adalah nilai eigen matriks A . Sedangkan jika $|\lambda_i(A)| \leq 1$, maka sistem linier diskrit adalah stabil.

Keterkendalian

Diberikan suatu sistem diskrit yang dapat dinyatakan dalam bentuk:[5]

$$x((k+1)N) = Ax(kN) + Bu(kN) \quad (2.2.3)$$

dengan,

$x(kN)$:vektor keadaan berukuran $nx1$ pada saat waktu k sampling,

$u(kN)$:vektor masukan pada saat waktu k sampling,

A :matriks non singular berukuran nxn ,

B :matriks berukuran $nx1$,

N :periode sampling,

Diasumsikan $u(t) = u(kN)$ adalah konstan untuk $kN \leq t < (k+1)N$. Keadaan awal diambil sebarang, sedangkan keadaan akhirnya adalah titik asal. Pengertian keterkendalian sistem diskrit diberikan oleh definisi berikut.

Definisi 2.2.2. [4]

Sistem diskrit seperti yang diberikan pada persamaan(2.2.3) adalah terkendali jika untuk setiap keadaan sebarang $x(0) = x_0$ ada masukan $u(kT)$ yang tidak dibatasi mentransfer keadaan x_0 kesebarang keadaan akhir dalam waktu berhingga.

Berdasarkan Definisi (2.2.2) tersebut, sistem diskrit dapat dikatakan terkendali jika sebarang nilai awal dapat dipindah ke sebarang nilai keadaan yang diinginkan dengan suatu masukan dan dalam waktu berhingga. Kemudian syarat-syarat keterkendalian sistem diskrit diberikan pada teorema berikut.

Teorema 2.2.2[4]

Diberikan matriks keterkendalian M_c sebagai berikut:

$$M_c = \begin{pmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{pmatrix}$$

Sistem diskrit yang diberikan pada Persamaan (2.2.3) terkendali jika dan hanya jika rank dari matriks keterkendalian M_c adalah sama dengan n .

Keteramatan

Diberikan suatu sistem diskrit yang dapat dinyatakan dalam bentuk:[5]

$$\begin{cases} x((k+1)N) &= Ax(kN) \\ y(kN) &= Cx(kN) \end{cases} \quad (2.2.4)$$

dengan,

$x(kN)$:vektor keadaan berukuran $n \times 1$ pada saat waktu k sampling,

$y(kN)$:vektor keluaran berukuran $m \times 1$ pada saat waktu k sampling,

A :matriks non singular berukuran $n \times n$,

C :matriks berukuran $m \times n$,

N :periode sampling,

Definisi 2.2.3. [4]

Sistem pada persamaan (2.2.4) dikatakan teramati jika setiap keadaan awal $x(0) = x_0$ dapat diamati keluaran sistem $y(kN)$ selama selang waktu yang terhingga.

Berdasarkan Definisi 2.2.3, keteramatan memiliki arti yaitu jika pada suatu pengamatan $y(0), y(N), y(2N), \dots, y(PN)$ dengan $P = n - 1$ maka dapat ditentukan $x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)$. Sehingga syarat perlu dan cukup dari keteramatan dapat diberikan pada teorema berikut.

Teorema 2.2.3[4]

Diberikan matriks keteramatan M_o sebagai berikut:

$$M_o = \begin{pmatrix} C^T & A^T C^T & \dots & (A^T)^{n-1} C^T \end{pmatrix}$$

Sistem diskrit yang diberikan pada Persamaan (2.2.4) teramati jika dan hanya jika rank dari matriks keteramatan M_o adalah sama dengan n .

2.2.3 Gramian Keterkendalian dan Gramian Keteramatan

Diberikan sistem linier waktu diskrit sebagai sistem (A, B, C, D) . Pada sistem (A, B, C, D) juga didefinisikan gramian keterkendalian W , dan gramian keteramatan M . Persamaan gramian keterkendalian W dan gramian keteramatan M dapat ditulis sebagai berikut.

$$W = \sum_{k=0}^{\infty} A^k B B^T (A^T)^k \quad (2.2.5)$$

$$M = \sum_{k=0}^{\infty} (A^T)^k C^T C A^k \quad (2.2.6)$$

Hubungan antara sifat kestabilan, keterkendalian dan keteramatan sistem dengan gramian keterkendalian W , dan gramian keteramatan M , dapat dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 2.2.4[3]

Diberikan sistem (A, B, C, D) yang stabil, terkendali dan teramati. Gramian keterkendalian W , dan gramian keteramatan M , masing-masing merupakan penyelesaian tunggal dan definit positif dari persamaan Lyapunov

$$AWA^T + BB^T - W = 0 \quad (2.2.7)$$

$$A^T M A + C^T C - M = 0 \quad (2.2.8)$$

Pada Teorema 2.2.4 sistem (A, B, C, D) yang stabil dimaksud adalah sistem stabil asimtotik. Sehingga, sistem (A, B, C, D) adalah sistem yang stabil asimtotik, terkendali, dan teramati.

2.2.4 Sistem Setimbang

Sistem setimbang $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ adalah sebuah sistem baru yang gramian keterkendalian \tilde{W} dan gramian keteramatan \tilde{M} mempunyai nilai yang sama serta merupakan matriks diagonal Σ . Sistem setimbang $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ diperoleh dari sistem awal (A, B, C, D) yang ditransformasikan terhadap matriks transformasi T . Matriks T didefinisikan sebagai matriks yang mentransformasikan sistem awal dengan variabel yang masih acak menjadi sistem setimbang dengan variabel terurut. Berikut merupakan pembentukan matriks transformasi T .

1. Diasumsikan sistem awal (A_s, B_s, C_s, D_s) stabil, terkendali, teramati.

2. Ditentukan gramian keterkendalian W dan gramian keteramatan M dari sistem awal (A_s, B_s, C_s, D_s) .
3. Ditentukan matriks ϕ sedemikian hingga berlaku $W = \phi^T \phi$.
4. Dikonstruksi matriks $\phi M \phi^T$ kemudian dilakukan diagonalisasi pada $\phi M \phi^T$ sedemikian sehingga berlaku $\phi M \phi^T = U \Sigma^2 U^T$, dimana,
 U = matriks unitary,
 $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$,
 $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(WM)}$, $i = 1, 2, \dots, n$ dengan
 $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$
5. Didapatkan matriks non singular T sebagai berikut.

$$T = \phi^T U \Sigma^{-\frac{1}{2}}$$

Kemudian setelah terbentuk matriks transformasi T , berikut ini merupakan pembentukan sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$:

$$\tilde{A}_s = T^{-1} A_s T, \tilde{B}_s = T^{-1} B_s, \tilde{C}_s = C T, \tilde{D}_s = D$$

Sistem setimbang dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{cases} \tilde{x}_{k+1} &= \tilde{A}_s \tilde{x}_k + \tilde{B}_s \tilde{u}_k \\ \tilde{y}_k &= \tilde{C}_s \tilde{x}_k + \tilde{D}_s \tilde{u}_k \end{cases} \quad (2.2.9)$$

Berikut ini merupakan hubungan antara sistem setimbang dengan gramian keterkendalian \tilde{W} dan gramian keteramatan \tilde{M} dalam sistem setimbang

Definisi 2.2.4. [3]

Sistem $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ disebut sistem setimbang dari sistem

(A, B, C, D) jika sistem $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ mempunyai gramian keterkendalian \tilde{W} , dan gramian keteramatan \tilde{M} , yang merupakan solusi tunggal dari persamaan Lyapunov

$$\tilde{A}\tilde{W}\tilde{A}^T + \tilde{B}\tilde{B}^T - \tilde{W} = 0 \quad (2.2.10)$$

$$\tilde{A}^T\tilde{M}\tilde{A} + \tilde{C}^T\tilde{C} - \tilde{M} = 0 \quad (2.2.11)$$

Sedemikian sehingga memenuhi

$$\begin{aligned} \tilde{W} = \tilde{M} = \sum = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r) \\ , \sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r \geq \dots \geq \sigma_n > 0. \end{aligned}$$

dengan σ_i nilai singular *Hankel* dari sistem (A, B, C, D) yang dapat didefinisikan sebagai

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(WM)}, i = 1, 2, \dots, n,$$

dengan λ_i adalah nilai-nilai eigen dari gramian keterkendalian W dan gramian keteramatan M .

2.2.5 Transformasi Z

Transformasi z adalah suatu transformasi yang sangat berguna untuk analisis sistem linier waktu diskrit. Transformasi z serupa dengan kegunaan transformasi Laplace, tetapi berlaku untuk sinyal dan sistem waktu diskrit. Transformasi z dari suatu sinyal $x(n)$ dapat dinyatakan sebagai berikut[5]:

$$X(z) = Z[x(t)] = Z[x(kT)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} \quad (2.2.12)$$

Halaman ini sengaja dikosongkan.

BAB III

METODE PENELITIAN

Pada bab ini dijelaskan mengenai langkah-langkah yang digunakan dalam penyelesaian masalah Tugas Akhir. Selain itu, dijelaskan prosedur dan proses tiap-tiap langkah yang dilakukan dalam penyelesaian Tugas Akhir.

3.1 Tahapan Penelitian

Penelitian Tugas Akhir ini dilakukan langkah-langkah sebagai berikut :

a. Studi Literatur

Pada tahap ini dilakukan identifikasi permasalahan dengan mencari referensi seperti referensi pada buku, jurnal atau yang lainnya yang dapat menunjang penelitian.

b. Analisis Sifat Sistem Awal

Pada tahap ini dilakukan analisis model awal sistem. Analisis yang dilakukan yaitu analisis kestabilan, keterkendalian, dan keteramatan. Setelah sistem awal dilakukan analisis, dapat dilihat bahwa sistem awalnya merupakan sistem yang stabil.

c. Reduksi Model Sistem Stabil

Pada tahap ini dilakukan reduksi model dari sistem yang stabil. Reduksi model dilakukan dengan menggunakan metode Aproksimasi Norma Hankel agar menghasilkan model dengan variabel keadaan yang jumlahnya lebih sedikit namun sifat-sifat dari model yang meliputi kestabilan, keterkendalian, dan keteramatan pada

sistem awal juga berlaku pada sistem yang telah direduksi.

d. Simulasi Sistem

Pada tahap ini dilakukan pengambilan contoh sistem yang stabil. Kemudian sistem tersebut diselesaikan dengan metode dari reduksi model sehingga didapatkan model akhir setelah direduksi. Setelah itu dilakukan simulasi untuk mendapatkan hasil optimal.

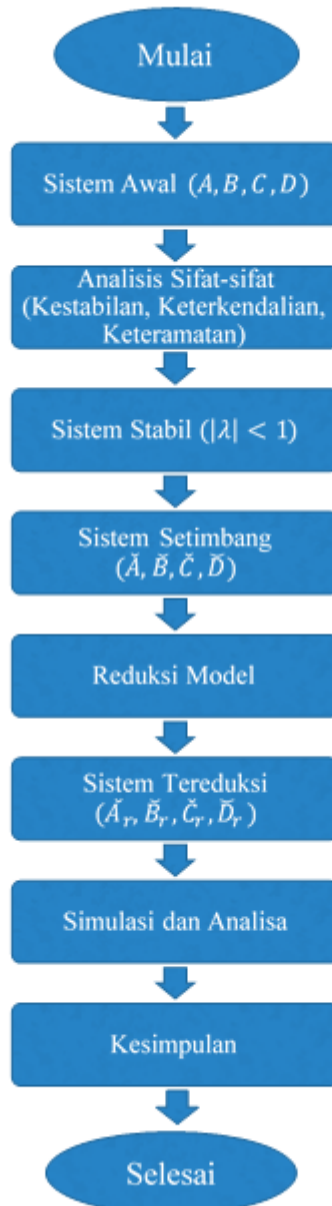
e. Penarikan Kesimpulan dan Pemberian Saran

Pada tahap ini, dilakukan penarikan kesimpulan berdasarkan hasil akhir yang telah didapatkan serta pemberian saran untuk perbaikan dan pengembangan penelitian selanjutnya.

f. Penyusunan Laporan Hasil Penelitian

Pada tahap ini dilakukan penyusunan laporan berdasarkan hasil analisis dan penelitian.

3.2 Diagram Alir Metodologi Penelitian



Gambar 3.1: Diagram Alir Metodologi Penelitian

Halaman ini sengaja dikosongkan.

BAB IV

ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dijelaskan secara detail mengenai sifat-sifat sistem yang meliputi kestabilan, keterkendalian, dan keteramatan. Kemudian dijelaskan mengenai pembentukan sistem setimbang dan analisisnya, pembentukan sistem tereduksi dan analisisnya, serta simulasi.

4.1 Sistem Awal

Sistem awal yang digunakan pada pembahasan ini adalah sistem linier waktu diskrit. Pada sistem linier waktu diskrit seperti pada Persamaan (2.2.1) dilakukan analisis sifat sistem, meliputi sifat kestabilan, sifat keterkendalian, dan sifat keteramatan.

4.1.1 Kestabilan dari Segi Nilai Karakteristik

Sifat kestabilan pada sistem linier diskrit tidak ada bedanya dengan sistem kontinu. Untuk mendapatkan sifat kestabilan pada sistem diskrit dapat dilihat berdasarkan penyelesaian dari sistem tersebut. Dengan metode rekursi, sistem diskrit pada Persamaan (2.2.1) dapat ditulis sebagai.

$$\begin{aligned}x(1) &= Ax(0) \\x(2) &= Ax(1) = A^2x(0) \\&\vdots \\x(k) &= A^kx(0)\end{aligned}\tag{4.1.1}$$

Pandang Persamaan (4.1.1), penyelesaian $x(k)$ dapat dinyatakan sebagai fungsi $x(0)$. Kemudian dengan melakukan transformasi z pada kedua ruas dari Persamaan (4.1.1), maka diperoleh:

$$\begin{aligned}
z(x(k+1)) &= z(Ax(k)) \\
zX(z) - zx(0) &= AX(z) \\
zX(z) - AX(z) &= zx(0) \\
(zI - A)X(z) &= zx(0) \\
(zI - A)^{-1}(zI - A)X(z) &= (zI - A)^{-1}[zx(0)] \\
X(z) &= (zI - A)^{-1}zx(0)
\end{aligned}$$

dengan $X(z) = Z[x(k)]$

Selanjutnya dengan invers transformasi z , diperoleh:

$$x(k) = Z^{-1}[(zI - A)^{-1}z]x(0)$$

atau dapat dituliskan sebagai

$$\Phi(k) = Z^{-1}[(zI - A)^{-1}z]$$

dengan $\Phi(k)$ adalah matriks transisi. Sehingga pada Persamaan (4.1.1), mempunyai penyelesaian:

$$x(k) = \Phi(k)x(0)$$

dengan $\Phi(k)$ yang disebut sebagai matriks transisi dan $\Phi(k) = A^k = Z^{-1}[(zI - A)^{-1}z]$

Karena nilai $x(0)$ adalah konstan, sehingga nilai dari penyelesaian $x(k)$ bergantung pada $\Phi(k) = A^k = Z^{-1}[(zI - A)^{-1}z]$ dengan A adalah matriks persegi sembarang berukuran $n \times n$ dengan nilai eigen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ untuk $(k \leq n)$. Sehingga untuk menentukan $\Phi(k)$, maka dapat dilihat berdasarkan bentuk-bentuk dari matriks A , yaitu:

i. Jika A adalah Matriks Diagonal

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

maka

$$A^k = \begin{pmatrix} \lambda_i^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

Dapat dilihat bahwa ketika nilai $|\lambda_i| < 1$, $i = 1, \dots, n$ didapatkan $\lambda_i^k \rightarrow 0$ sehingga $A^k \rightarrow 0$ untuk $k \rightarrow \infty$, atau sama artinya dengan $\Phi(k) \rightarrow 0$. Sehingga didapatkan penyelesaian $x(k) \rightarrow 0$ untuk $k \rightarrow \infty$. Jadi sistem dikatakan stabil asimtotik jika $|\lambda_i| < 1$, $i = 1, \dots, n$.

Selain itu, sistem dikatakan sifat stabil asimtotik dapat analisis menggunakan rumus $\Phi(k) = Z^{-1}[(zI - A)^{-1}z]$ sebagai berikut,

$$(zI - A) = \begin{pmatrix} z - \lambda_i^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & z - \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

$$(zI - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(z - \lambda_i^k)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{(z - \lambda_n^k)} \end{pmatrix}$$

$$(zI - A)^{-1}z = \begin{pmatrix} \frac{z}{(z - \lambda_i^k)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{z}{(z - \lambda_n^k)} \end{pmatrix}$$

$$\Phi(k) = A^k = Z^{-1}[(zI - A)^{-1}z]$$

$$\Phi(k) = Z^{-1} \begin{pmatrix} \frac{z}{(z-\lambda_i^k)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{z}{(z-\lambda_n^k)} \end{pmatrix}$$

$$\Phi(k) = A^k = \begin{pmatrix} \lambda_i^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

Berdasarkan uraian diatas dapat dilihat bahwa, jika $|\lambda_i| < 1$, $i = 1, \dots, n$ maka $\lambda_i^k \rightarrow 0$ Sehingga $A^k \rightarrow 0$ untuk $k \rightarrow \infty$, atau sama artinya dengan $\Phi(k) \rightarrow 0$. Sehingga didapatkan penyelesaian $x(k) \rightarrow 0$ untuk $k \rightarrow \infty$. Jadi sistem bersifat stabil asimtotik jika $|\lambda_i| < 1$, $i = 1, \dots, n$.

Selanjutnya ditinjau analisis sifat kestabilan untuk nilai $|\lambda_i| = 1$ $i = 1, \dots, n$ apabila matriks A adalah matriks diagonal.

$$A^k = \begin{pmatrix} \lambda_i^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

Dapat dilihat bahwa, jika $|\lambda_i| = 1$ dengan $i = 1, \dots, n$, maka $\lambda_i^k = 1$ untuk $k \rightarrow \infty$.

Sehingga $A^k = 1$, memiliki arti yang sama dengan $\Phi(k) = 1$. Sehingga untuk $k \rightarrow \infty$ didapatkan $x(k) = x(0)$ maka sistem bersifat stabil.

ii. Jika A adalah Matriks yang Tidak Dapat Didiagonalkan

Jika matriks A tidak dapat didiagonalkan, maka dibawa

ke dalam bentuk Jordan. Salah satu penyebab sebuah matriks tidak dapat didiagonalkan adalah multiplisitas geometri (dimensi dari ruang eigen) lebih kecil dari multiplisitas aljabarnya (jumlah nilai eigen λ yang sama).

$$A = TJT^{-1}$$

dari bentuk Jordan di atas, didapatkan persamaan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} A^2 &= AA = (TJT^{-1})(TJT^{-1}) = TJ^2T^{-1} \\ A^3 &= A^2A = (TJ^2T^{-1})(TJT^{-1}) = TJ^3T^{-1} \\ &\vdots \\ A^k &= TJ^kT^{-1} \end{aligned}$$

Selanjutnya, suatu blok Jordan J_i adalah matriks segitiga atas $k \times k$ dengan bentuk:

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & J_n \end{pmatrix}$$

sehingga

$$J^k = \begin{pmatrix} J_1^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & J_n^k \end{pmatrix}$$

dan

$$J_i^k = \begin{pmatrix} \lambda_i^k & k\lambda_i^{k-1} & \frac{1}{2!}k^2\lambda_i^{k-2} & \cdots & \frac{k^{d_i j-1}}{(d_i j-1)!}\lambda_i^{k-d_i j} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{1}{2!}k^2\lambda_i^{k-2} \\ & & & \ddots & k\lambda_i^{k-1} \\ 0 & & & & \lambda_i^k \end{pmatrix}$$

Dapat dilihat bahwa, jika $|\lambda_i| < 1$, $i = 1, \dots, n$ maka $\lambda_i^k \rightarrow 0$ untuk $k \rightarrow \infty$ Sehingga $A^k \rightarrow 0$, memiliki arti yang sama dengan $\Phi(k) \rightarrow 0$. Jadi untuk $k \rightarrow \infty$ didapatkan $x(k) \rightarrow 0$. Sehingga sistem bersifat stabil asimtotik jika $|\lambda_i| < 1$, $i = 1, \dots, n$.

Selanjutnya dilakukan analisis sifat kestabilan untuk nilai $|\lambda_i| = 1$, $i = 1, \dots, n$. Sebelumnya telah diketahui bahwa bentuk matriks Jordan adalah sebagai berikut.

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & J_n \end{pmatrix}$$

$$J^k = \begin{pmatrix} J_1^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & J_n^k \end{pmatrix}$$

dan

$$J_i^k = \begin{pmatrix} \lambda_i^k & k\lambda_i^{k-1} & \frac{1}{2!}k^2\lambda_i^{k-2} & \cdots & \frac{k^{d_i j-1}}{(d_i j-1)!}\lambda_i^{k-d_i j} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{1}{2!}k^2\lambda_i^{k-2} \\ & & & \ddots & k\lambda_i^{k-1} \\ 0 & & & & \lambda_i^k \end{pmatrix}$$

Jadi dapat dilihat jika $|\lambda_i| = 1$, maka

$$J_i^k = \begin{pmatrix} 1^k & k1^{k-1} & \frac{1}{2!}k^21^{k-2} & \dots & \frac{k^{d_i j-1}}{(d_i j-1)!}1^{k-d_i j} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{1}{2!}k^21^{k-2} \\ & & & \ddots & k1^{k-1} \\ 0 & & & & 1^k \end{pmatrix}$$

$$J_i^k = \begin{pmatrix} 1 & k & \frac{1}{2!}k^2 & \dots & \frac{k^{d_i j-1}}{(d_i j-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{1}{2!}k^2 \\ & & & \ddots & k \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Dapat dilihat bahwa, jika nilai $|\lambda_i| = 1$, maka $\lambda_i^k = 1$ untuk $k \rightarrow \infty$. Sehingga $A^k = 1$, memiliki arti yang sama dengan $\Phi(k) = 1$. Jadi untuk $k \rightarrow \infty$ didapatkan $x(k) = x(0)$ maka sistem bersifat stabil.

Pada **Teorema (2.2.4)** dijelaskan bahwa sifat kestabilan sistem diperlukan untuk menjamin adanya solusi Lyapunov yang berakibat dapat ditemukannya nilai gramian keterkendalian W dan gramian keteramatan M . Kemudian sifat keterkendalian sistem diperlukan untuk menjamin gramian keterkendaliannya definit positif. Dan sifat keteramatan sistem diperlukan untuk menjamin gramian keteramatannya definit positif.

4.1.2 Keterkendalian

Sistem dikatakan terkendali apabila sebarang nilai awal yang dapat dipindahkan ke sebarang state yang diinginkan

dengan suatu kendali dan dalam waktu yang berhingga. Diasumsikan $u(t) = u(kN)$ adalah konstan untuk $kN \leq t < (k+1)N$ dan keadaan awalnya adalah sebarang, sedangkan keadaan akhirnya adalah titik asal ruang keadaan.

Sistem kendali yang diberikan pada Persamaan (2.2.3) adalah terkendali jika terdapat potongan konstan dari sinyal kendali $u(kN)$ yang didefinisikan atas bilangan berhingga dari periode sampling, $0 \leq kN < nN$, sedemikian sehingga, mulai dari setiap state awal $x(kN)$ dapat ditransfer atau dijadikan sama dengan nol untuk $kN \leq nN$ pada awal state x_f dalam n periode sampling. Jika setiap keadaan adalah terkendali, maka sistem tersebut disebut sebagai sistem yang terkendali. Penyelesaian Persamaan (2.2.3) adalah:

$$x(nN) = A^n x(0) + \sum_{j=0}^{n-1} A^{n-1-j} B u(jN) \quad (4.1.2)$$

$$x(nN) = A^n x(0) + A^{n-1} B u(0) + A^{n-2} B u(N) + \dots + B u((n-1)N)$$

Sehingga diperoleh:

$$x(nN) - A^n x(0) = A^{n-1} B u(0) + A^{n-2} B u(N) + \dots + B u((n-1)N)$$

$$x(nN) - A^n x(0) =$$

$$\begin{pmatrix} B & : & AB & : & \dots & : & A^{n-1}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u((n-1)N) \\ u((n-2)N) \\ \vdots \\ u(0) \end{pmatrix} \quad (4.1.3)$$

Karena B adalah matriks berukuran $nx1$, maka masing-masing dari matriks $B, AB, \dots, A^{n-1}B$ adalah matriks berukuran $nx1$ atau vektor kolom. Jika sistem tersebut terkendali, maka mulai dari titik sebarang $x(0)$, dapat dibuat

keadaan tersebut menuju suatu titik dimana $x(kN) = 0$ untuk $k \leq n$ dengan memberikan fungsi $u(0), u(T), \dots, u((n-1)N)$. Jadi jika $x(kN) = 0$ maka dari Persamaan (4.1.3) dapat diperoleh:

$$A^n x(0) + \sum_{j=0}^{n-1} A^{n-1-j} B u(jN) = 0$$

atau

$$\begin{aligned} x(0) &= -\sum_{j=0}^{n-1} A^{n-j-1} B u(jN) = 0 \\ &= -(A^{-1} B u(0) + A^{-2} B u(N) + \dots + A^{-n} B u((n-1)N) \\ &= -((A)^{-1} B u(0) + (A^2)^{-1} B u(N) + \dots + (A^n)^{-1} B u((n-1)N) \end{aligned}$$

Karena A adalah matriks non singular yang berukuran $n \times n$, maka $(A)^{-1} B, (A^2)^{-1} B, \dots, (A^n)^{-1} B$ adalah matriks $n \times 1$, yaitu:

$$A^{-1} B = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, A^{-2} B = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \dots, A^{-n} B = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

Persamaan diatas dapat dituliskan dalam bentuk n persamaan aljabar simultan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x_1(0) &= a_{11}u(0) - a_{12}u(N) - \dots - a_{1n}u((n-1)N) \\ x_2(0) &= a_{21}u(0) - a_{22}u(N) - \dots - a_{2n}u((n-1)N) \\ &\vdots \\ x_n(0) &= a_{n1}u(0) - a_{n2}u(N) - \dots - a_{nn}u((n-1)N) \end{aligned}$$

Agar persamaan tersebut memiliki penyelesaian untuk setiap $x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)$ yang telah diberikan, maka matriks $(a_{ij})_{n \times n}$ adalah bebas linier atau matriks $(a_{ij})_{n \times n}$ mempunyai *rank* sebanyak n .

Berdasarkan analisis di atas, Keadaan sistem diskrit dinyatakan terkendali jika dan hanya jika vektor

$(A)^{-1}B, (A^2)^{-1}B, \dots, (A^n)^{-1}B$ adalah bebas linier, atau matriks keterkendalian M_c yang dapat dituliskan sebagai berikut

$$M_c = \begin{pmatrix} (A)^{-1}B & : & (A^2)^{-1}B & : & \dots & : & (A^n)^{-1}B \end{pmatrix}$$

atau dapat juga dituliskan,

$$M_c = \begin{pmatrix} B & : & AB & : & \dots & : & A^{n-1}B \end{pmatrix}$$

Pada matriks keterkendalian M_c dapat disimpulkan bahwa sistem yang dinyatakan pada persamaan (2.2.3) dimana $u(kN)$ adalah vektor berdimensi n , maka dapat dibuktikan bahwa keadaan sistem terkendali jika dan hanya jika $rank$ dari matrik keterkendalian M_c sebanyak n .

Jika $rank$ matriks keterkendalian sama dengan n , maka untuk sebarang $x(nN) = x_f$ (state yang dituju) terdapat barisan $u(0), u(N), \dots, u((n-1)N)$ yang memenuhi Persamaan (4.1.2) dan (4.1.3). Jadi $rank$ penuh untuk matriks keterkendalian adalah syarat cukup keterkendalian.

Selanjutnya dibuktikan syarat perlu untuk keterkendalian. Andaikan matriks keterkendalian $M_c < n$, maka menurut Teorema Cayley Hamilton $P(A) = 0$. $P(A)$ adalah polynomial karakteristik dalam A .

Menurut teorema Cayley Hamilton :

$$p(A) = A^n + a_1A^{n-1} + \dots + a_{n-1}A + a_nI = 0$$

$$A^n + a_1A^{n-1} + a_2A^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

kemudian kedua ruas dikalikan dengan B sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} (A^n + a_1A^{n-1} + a_2A^{n-2} + \dots + a_n)B &= 0B \\ A^nB + a_1A^{n-1}B + a_2A^{n-2}B + \dots + a_nB &= 0 \end{aligned}$$

Untuk sebarang i , $A^i B$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari $B, AB, \dots, A^{n-1}B$. Maka untuk sebarang i berlaku:

$$M_c(i) = \begin{pmatrix} B & : & AB & : & \dots & : & A^{i-1}B \end{pmatrix} < n$$

Jadi matriks $M_c(i)$ tidak mungkin merupakan span ruang berdimensi n . Atau dengan kata lain, untuk beberapa x_f tidak mungkin diperoleh u yang dapat membawa $x(iN) = x_f, \forall i$. Jadi dapat disimpulkan bahwa sistem tidak terkendali jika dan hanya jika rank dari matriks keterkendalian $\neq n$.

Hubungan antara sifat keterkendalian dengan gramian keterkendalian dapat dinyatakan sebagai berikut :[6]

Teorema 4.1.1 *Pernyataan berikut ekivalen*

1. *Sistem (A, B, C, D) terkendali,*
2. *Gramian Keterkendalian W definit positif,*
3. *Matriks keterkendalian(M_c) mempunyai rank baris penuh,*
4. *Ambil λ dan v sebagai nilai eigen dan vektor eigen kiri yang bersesuaian dari matriks A , yang berarti $v^T A = v^T \lambda$ maka berlaku $v^T \neq 0$*

4.1.3 Keteramatan

Sistem teramati jika setiap keadaan awal $x(0)$ dapat ditentukan dari pengamatan $y(NT)$ selama selang waktu yang terhingga. Oleh karena itu, suatu sistem teramati jika setiap transisi statenya mempengaruhi setiap elemen vektor keluaran.

Konsep keteramatan berguna untuk menyelesaikan permasalahan rekonstruksi variabel state yang tidak terukur, dari variabel yang terukur dalam selang waktu yang seminimum mungkin. Bagaimanapun juga dalam prakteknya

masih kesulitan, karena masih adanya beberapa variabel state yang tidak dapat diukur secara langsung. Selanjutnya sangat perlu untuk mengestimasi variabel state yang tidak terukur tersebut untuk menentukan signal atau fungsi kendali optimal.

Jika sistem yang dinyatakan seperti pada Persamaan (2.2.1), maka penyelesaiannya adalah:

$$x(kN) = A^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} B u(jN)$$

dengan $y(kN)$ adalah:

$$y(kN) = C A^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} C A^{k-j-1} B u(jN) + D u(kN) \quad (4.1.4)$$

misalkan:

$$Q = \sum_{j=0}^{k-1} C A^{k-j-1} B u(jN)$$

Karena matriks A, B, C , dan D diketahui dan $u(kN)$ juga diketahui, maka Q dan $Du(kN)$ pada ruas kanan dari Persamaan (4.1.4) merupakan besaran yang diketahui. Oleh karena itu, dapat dikurangkan pada $y(kN)$. Hal ini dapat dijelaskan berdasarkan definisi keteramatan sebagai berikut: Sistem teramati jika setiap keadaan awal $x(0)$ dapat ditentukan dari pengamatan $y(kN)$ selama waktu yang terhingga. Suatu sistem teramati jika setiap transisi statenya mempengaruhi setiap elemen vektor keluaran.

Sekarang ambil sebarang state awal x_0 dan x_1 yang menghasilkan $y(t, x_0, u) = y(t, x_1, u)$, maka diperoleh $x_0 = x_1$. Sebagai buktinya diberikan state x_0 yang menghasilkan keluaran:

$$y(t, x_0, u) = C A^k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} C A^{k-j-1} B u(jN) + D u(kN)$$

Kemudian diberikan state x_1 menghasilkan keluaran:

$$y(t, x_1, u) = C A^k x_1 + \sum_{j=0}^{k-1} C A^{k-j-1} B u(jN) + D u(kN)$$

Karena $y(t, x_0, u) = y(t, x_1, u)$ menghasilkan:

$$\begin{aligned} CA^k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} CA^{k-j-1} Bu(jN) + Du(kN) &= \\ CA^k x_1 + \sum_{j=0}^{k-1} CA^{k-j-1} Bu(jN) + Du(kN) & \\ CA^k x_0 = CA^k x_1 & \\ CA^k(x_0 - x_1) = 0 & \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa Q dan $Du(kN)$ saling menghilangkan, sehingga untuk penyelidikan syarat dari sifat keteramatan perlu meninjau sistem yang dinyatakan oleh Persamaan (2.2.4). Berikut ini diturunkan syarat dari sifat keteramatan sistem waktu diskrit yang dinyatakan oleh Persamaan (2.2.4). Penyelesaian dari Persamaan (2.2.4) adalah:

$$y(kN) = Cx(kN) = CA^k x(0)$$

Keteramatan berarti bahwa untuk $y(0), y(N), y(2N), \dots, y(PN)$, dapat ditentukan $x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)$. Untuk menentukan n variabel yang tidak diketahui, diperlukan n nilai $y(kN)$ yaitu untuk $P = n - 1$ atau $y(0), y(N), \dots, y((n - 1)N)$ untuk menentukan $x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)$. Untuk suatu sistem yang teramati diberikan sebagai:

$$\begin{aligned} k = 0 & \longrightarrow y(0) = Cx(0) \\ k = 1 & \longrightarrow y(N) = CAx(0) \\ & \vdots \\ k = n - 1 & \longrightarrow y((n - 1)N) = CA^{n-1}x(0) \end{aligned}$$

Maka harus dapat menentukan $x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)$.

Dengan mengingat bahwa $y(kN)$ adalah vektor berdimensi m , maka n persamaan simultan diatas menghasilkan nm persamaan, yang semuanya melibatkan $x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)$. Hal ini dapat diterangkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
y(0) = Cx(0) &\rightarrow \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ \vdots \\ y_m(0) \end{pmatrix}_{m \times 1} = C_{m \times n} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{pmatrix}_{n \times 1} \\
y(N) = CAx(0) &\rightarrow \begin{pmatrix} y_1(N) \\ y_2(N) \\ \vdots \\ y_m(N) \end{pmatrix}_{m \times 1} = C_{m \times n} A_{n \times n} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{pmatrix}_{n \times 1} \\
&\vdots \\
y((n-1)N) = CA^{n-1}x(0) &\rightarrow \begin{pmatrix} y_1((n-1)N) \\ y_2((n-1)N) \\ \vdots \\ y_m((n-1)N) \end{pmatrix}_{m \times 1} = C_{m \times n} A_{n \times n}^{n-1} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{pmatrix}_{n \times 1}
\end{aligned}$$

Sehingga dari penyelesaian diatas dapat dilihat bahwa dari persamaan n simultan diatas menghasilkan nm persamaan, yang semuanya melibatkan $x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)$. Persamaan n simultan diatas dapat dituliskan dalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$\begin{pmatrix} y_1(T) \\ y_2(T) \\ \vdots \\ y_m(T) \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ y_1((n-1)N) \\ y_2((n-1)N) \\ \vdots \\ y_m((n-1)N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{m \times n} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ C_{m \times n} A_{n \times n} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ C_{m \times n} A_{n \times n}^{n-1} \end{pmatrix}_{(nm \times n)} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{pmatrix}$$

Untuk mendapatkan penyelesaian tunggal dari $x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)$ dari persamaan nm persamaan, maka

harus dapat menulis secara tepat n persamaan yang bebas linier dari seluruh persamaan yang ada. Hal ini memerlukan persyaratan bahwa matriks $n \times n$ harus memiliki *rank* sebanyak n .

$$\begin{pmatrix} C \\ - - - \\ CA \\ - - - \\ \vdots \\ - - - \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n$$

Misalkan M_o adalah matriks keteramatan dari sistem (A, B, C, D) maka *rank* dari matriks keteramatan M_o adalah sebanyak n . Dengan mengingat bahwa *rank* dari suatu matriks dan *rank* dari transpose konjugasi matriks tersebut adalah sama, maka dapat dinyatakan sifat keteramatan adalah sebagai berikut:

Sistem yang dinyatakan oleh Persamaan (2.2.4) teramati jika dan hanya jika matriks $n \times n$

$$M_o^* = \begin{pmatrix} C^* & : & A^* C^* & : & \dots & : & (A^*)^{n-1} C^* \end{pmatrix} \quad (4.1.5)$$

Maka transpose dari matriks keteramatan M_o^* harus mempunyai *rank* sebanyak n atau memiliki vektor kolom yang bebas linier. Matriks pada Persamaan (4.1.5) biasanya disebut dengan matriks keteramatan. Jika matriks C dan A real, kemudian tanda transpose konjugate untuk $A^* C^*$ dapat diubah ke dalam $A^T C^T$.

Hubungan antara sifat keteramatan dengan gramian keteramatan dapat dinyatakan sebagai berikut :[6]

Teorema 4.1.2 *Pernyataan berikut ekivalen*

1. Sistem (A, B, C, D) teramati,

2. *Gramian Keteramatan M definit positif,*
3. *Matriks keteramatan(M_c) mempunyai rank baris penuh,*
4. *Ambil λ dan y sebagai nilai eigen dan vektor eigen kanan yang bersesuaian dari matriks A , yang berarti $Ay = \lambda y$ maka berlaku $Cy \neq 0$.*

4.2 Sistem Setimbang

Sistem setimbang $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ adalah sistem baru yang mempunyai gramian keterkendalian (\tilde{W}) dan gramian keteramatan (\tilde{M}) yang sama, dan juga merupakan matriks diagonal Σ .

Konstruksi Matriks Transformasi T

Sistem setimbang $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ diperoleh dari sistem awal (A, B, C, D) yang ditransformasikan terhadap matriks transformasi T . Matriks T didefinisikan sebagai matriks yang mentransformasikan sistem awal dengan variabel yang masih acak menjadi sistem setimbang dengan variabel terurut. Berikut merupakan pembentukan matriks transformasi T :

1. Diberikan masukan berupa sistem (A_s, B_s, C_s, D_s) yang diasumsikan stabil asimtotik, terkendali, dan teramati.
2. Ditentukan gramian keterkendalian W dan gramian keteramatan M dari sistem (A_s, B_s, C_s, D_s) . Sistem (A_s, B_s, C_s, D_s) adalah stabil asimtotik, terkendali, dan teramati maka berdasarkan **Teorema 2.2.4** dijamin bahwa W dan M adalah definit positif.

Matriks W definit positif maka semua nilai eigen dari W adalah positif dan $|W| \neq 0$, artinya W juga merupakan matriks non singular. Begitu juga dengan M berlaku sama, sehingga matriks M juga merupakan matriks yang non singular.

3. Ditentukan matriks ϕ sedemikian sehingga berlaku $W = \phi^T \phi$. Dikarenakan matriks W non singular, maka ϕ jelas merupakan matriks non singular juga.
4. Dikonstruksikan matriks $\phi M \phi^T$ dan dilakukan diagonalisasi pada $\phi M \phi^T$ sedemikian sehingga berlaku $\phi M \phi^T = U \Sigma^2 U^T$, dengan U adalah matriks Unitary (matriks yang dibagun oleh vektor eigennya) dan $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = \sqrt{\lambda_i(WM)}$ dengan $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n > 0$.
Dikarenakan matriks W, M , dan ϕ adalah matriks non singular, maka $\phi M \phi^T$ juga merupakan matriks non singular. Dan untuk $U \Sigma^2 U^T = \phi M \phi^T$, maka mengakibatkan matriks $U \Sigma^2 U^T$ merupakan matriks non singular juga.
 U adalah matriks Unitary, maka berlaku $U U^T = U^T U = I$ yang berarti bahwa U dan U^T masing-masing merupakan matriks non singular. Dan untuk matriks $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ dengan $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n > 0$, maka jelas bahwa Σ merupakan matriks non singular dan $\Sigma^{\frac{1}{2}}$ juga merupakan matriks non singular.
5. Didefinisikan matriks T non singular sebagai:

$$T = \phi^T U \Sigma^{\frac{1}{2}} \quad (4.2.1)$$

Dikarenakan matriks $U \Sigma^2 U^T$ dan $\phi M \phi^T$ merupakan matriks non singular yang berarti bahwa matriks $\phi, U, \Sigma^{\frac{1}{2}}$ masing-masing merupakan matriks non singular. Sehingga matriks transformasi T juga merupakan matriks non singular.

Pembentukan Sistem Setimbang

Realisasi setimbang adalah realisasi yang mentransformasi suatu sistem menjadi sistem baru yang mempunyai gramian

keterkendalian dan gramian keteramatan yang sama dan merupakan matriks diagonal. Misalkan diberikan suatu matriks transformasi T yang memenuhi:

$$x_k = T\hat{x}_k \quad (4.2.2)$$

dengan,

x_k :variabel keadaan dari sistem (A_s, B_s, C_s, D_s)

\tilde{x}_k :variabel keadaan dari sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$

T :matriks transformasi yang non singular dan berukuran $n \times n$

Selanjutnya, Persamaan (4.2.2) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\tilde{x}_k = T^{-1}x_k \quad (4.2.3)$$

untuk $k = k + 1$, maka Persamaan (4.2.3) menjadi:

$$\tilde{x}_{k+1} = T^{-1}x_{k+1} \quad (4.2.4)$$

Jika sistem awal pada Persamaan (4.2.4) disubstitusikan pada Persamaan (2.2.9) maka diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\tilde{x}_{k+1} = T^{-1}(A_s x_k + B_s u_k) \quad (4.2.5)$$

Selanjutnya, mensubstitusi Persamaan (4.2.2) ke dalam Persamaan (4.2.5), maka diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{k+1} &= T^{-1}(A_s T \tilde{x}_k + B_s \tilde{u}_k) \\ \tilde{x}_{k+1} &= T^{-1}A_s T \tilde{x}_k + T^{-1}B_s \tilde{u}_k \\ \tilde{x}_{k+1} &= \tilde{A}_s \tilde{x}_k + \tilde{B}_s \tilde{u}_k \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

Sedangkan untuk mendapatkan matriks \tilde{C}_s dan \tilde{D}_s , dilakukan dengan mensubstitusikan Persamaan (4.2.2) ke dalam Persamaan (2.2.9), maka diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\tilde{y}_k &= C_s x_k + D_s u_k \\
\tilde{y}_k &= C_s (T \tilde{x}_k) + D_s \tilde{u}_k \\
\tilde{y}_k &= C_s T \tilde{x}_k + D_s \tilde{u}_k \\
\tilde{y}_k &= \tilde{C}_s T \tilde{x}_k + \tilde{D}_s \tilde{u}_k
\end{aligned} \tag{4.2.7}$$

Sehingga didapatkan,

$$\tilde{A}_s = T^{-1} A_s T, \tilde{B}_s = T^{-1} B_s, \tilde{C}_s = C_s T, \tilde{D}_s = D_s \tag{4.2.8}$$

Dapat dituliskan kembali Persamaan (4.2.6) dan Persamaan (4.2.7) sebagai suatu sistem setimbang dari sistem (A_s, B_s, C_s, D_s) sebagai berikut:

$$\begin{cases} \tilde{x}_{k+1} &= \tilde{A}_s \tilde{x}_k + \tilde{B}_s \tilde{u}_k \\ \tilde{y}_k &= \tilde{C}_s \tilde{x}_k + \tilde{D}_s \tilde{u}_k \end{cases} \tag{4.2.9}$$

Untuk selanjutnya sistem setimbang ini disebut sebagai sistem $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$.

Gramian keterkendalian dari sistem $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dapat diperoleh dengan mensubsitusikan Persamaan (4.2.8) ke dalam Persamaan (2.2.5), yaitu:

$$W = T \tilde{W} T^T \tag{4.2.10}$$

dengan,

$$\tilde{W} = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{A}_s^k \tilde{B}_s \tilde{B}_s^T (\tilde{A}_s^T)^k$$

Berdasarkan Persamaan (4.2.10), maka gramian keterkendalian dari sistem $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dapat dituliskan kembali ke dalam bentuk

$$\tilde{W} = T^{-1} W (T^{-1})^T \tag{4.2.11}$$

Sedangkan gramian keteramatan dari sistem $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dapat diperoleh dengan mensubsitusikan Persamaan (4.2.8) ke dalam Persamaan (2.2.6), sehingga diperoleh

$$M = (T^{-1})^T \tilde{M} T^{-1} \tag{4.2.12}$$

dengan,

$$\tilde{M} = \Sigma_{k=0}^{\infty} (\tilde{A}_s^T)^k \tilde{C}_s^T \tilde{C}_s \tilde{A}_s^k$$

Berdasarkan Persamaan (4.2.12), maka gramian keteramatan sistem $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$\tilde{M} = T^T \tilde{M}(T) \quad (4.2.13)$$

Dari hasil konstruksi matriks trnasformasi T , seperti yang dinyatakan pada Persamaan (4.2.1), maka selanjutnya ditinjau kembali untuk gramian keterkendalian \tilde{W} dan gramian keteramatan \tilde{M} dari sistem $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$. Berdasarkan Persamaan (4.2.1), maka gramian keterkendalian \tilde{W} , seperti yang dinyatakan pada Persamaan (4.2.11) dapat dituliskan kembali menjadi:

$$\begin{aligned} \tilde{W} &= (\phi^T U(\Sigma)^{-\frac{1}{2}})^{-1} W ((\phi^T U(\Sigma)^{-\frac{1}{2}})^{-1})^T \\ \tilde{W} &= ((\Sigma)^{\frac{1}{2}} U^{-1} (\phi^T)^{-1}) W (\phi^{-1} (U^T)^{-1} (\Sigma^T)^{\frac{1}{2}}) \end{aligned}$$

Telah diketahui bahwa $W = \phi^T \phi$ atau juga dapat ditulis $(\phi^T)^{-1} W (\phi)^{-1} = I$, I merupakan matriks identitas. Kemudian didapatkan persamaan berikut.

$$\begin{aligned} \tilde{W} &= ((\Sigma)^{\frac{1}{2}} U^{-1} (U^T)^{-1} (\Sigma^T)^{\frac{1}{2}}) \\ \tilde{W} &= ((\Sigma)^{\frac{1}{2}} (U^T U)^{-1} (\Sigma^T)^{\frac{1}{2}}) \\ \tilde{W} &= ((\Sigma)^{\frac{1}{2}} (I)^{-1} (\Sigma^T)^{\frac{1}{2}}) \end{aligned}$$

Karena Σ merupakan diagonal matriks sehingga $\Sigma^T = \Sigma$.

$$\begin{aligned} \tilde{W} &= ((\Sigma)^{\frac{1}{2}} (\Sigma)^{\frac{1}{2}}) \\ \tilde{W} &= \Sigma \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

Sedangkan gramian keteramatan \tilde{M} , seperti yang telah dituliskan oleh Persamaan (4.2.13) dapat dituliskan kembali menjadi:

$$\begin{aligned} \tilde{M} &= (\phi^T U(\Sigma)^{-\frac{1}{2}})^T M (\phi^T U(\Sigma)^{-\frac{1}{2}}) \\ \tilde{M} &= ((\Sigma^T)^{-\frac{1}{2}} U^T \phi) M (\phi^T U(\Sigma)^{-\frac{1}{2}}) \end{aligned}$$

Telah diketahui bahwa $(\phi)M(\phi^T) = U\Sigma^2U^T$ dan $U^TU = I$. Sehingga didapatkan persamaan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\tilde{M} &= ((\Sigma^T)^{-\frac{1}{2}}U^T\phi)M(\phi^TU(\Sigma)^{-\frac{1}{2}}) \\ \tilde{M} &= ((\Sigma^T)^{-\frac{1}{2}}U^TU\Sigma^2U^TU(\Sigma)^{-\frac{1}{2}} \\ \tilde{M} &= ((\Sigma^T)^{-\frac{1}{2}}I\Sigma^2I(\Sigma)^{-\frac{1}{2}} \\ \tilde{M} &= ((\Sigma^T)^{-\frac{1}{2}}\Sigma^2(\Sigma)^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

$$\tilde{M} = (\phi^TU(\Sigma)^{-\frac{1}{2}})^TM(\phi^TU(\Sigma)^{-\frac{1}{2}}) = \Sigma \quad (4.2.15)$$

Dari Persamaan (4.2.14) dan (4.2.15) didapatkan:

$$\tilde{W} = \tilde{M} = \Sigma \quad (4.2.16)$$

Menurut hasil yang telah diperoleh pada Persamaan (4.2.16) menunjukkan bahwa dengan mendefinisikan matriks T sebagai $T = \phi^TU(\Sigma)^{-\frac{1}{2}}$, maka dari sistem (A_s, B_s, C_s, D_s) dapat dibentuk suatu sistem $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ yang mempunyai gramian keterkendalian \tilde{W} dan gramian keteramatan \tilde{M} yang sama dengan matriks diagonal Σ .

Oleh karena itu, maka sistem $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ disebut sebagai bentuk sistem setimbang dari sistem (A_s, B_s, C_s, D_s) . Selanjutnya, Σ disebut sebagai gramian kesetimbangan dari sistem $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$. Berdasarkan pada **Definisi 2.2.4**, maka dapat dinyatakan bahwa gramian kesetimbang Σ merupakan solusi tunggal dari persamaan Lyapunov:

$$\tilde{A}_s\Sigma\tilde{A}_s^T + \tilde{B}_s\tilde{B}_s^T - \Sigma = 0 \quad (4.2.17)$$

$$\tilde{A}_s^T\Sigma\tilde{A}_s + \tilde{C}_s^T\tilde{C}_s - \Sigma = 0 \quad (4.2.18)$$

Sehingga sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ yang mempunyai gramian kesetimbangan Σ , yaitu:

$$\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r, \sigma_{r+1}, \dots, \sigma_n) = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{r+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_n \end{pmatrix}$$

dengan,

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_{r+1} \geq \dots \geq \sigma_n > 0 \quad (4.2.19)$$

Kestabilan Sistem Setimbang

Stabilitas sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dapat ditunjukkan melalui nilai eigen dari matriks \tilde{A}_s . Pada Persamaan (4.2.17) merupakan persamaan Lyapunov dari gramian kesetimbangan Σ . Dari Persamaan (4.2.17) dapat diperoleh:

$$\tilde{A}_s \Sigma \tilde{A}_s^T + \tilde{B}_s \tilde{B}_s^T = \Sigma \quad (4.2.20)$$

Misalkan diambil λ sebagai nilai eigen dari matriks \tilde{A}_s dan $v \neq 0$ sebagai vektor eigen yang berkaitan dengan λ , yang berarti:

$$v \tilde{A}_s = v \lambda \quad (4.2.21)$$

atau

$$\tilde{A}_s^T v^T = \lambda^T v^T \quad (4.2.22)$$

Selanjutnya, pada Persamaan (4.2.20) dikalikan dari kiri dengan vektor v dan kalikan dari kanan dengan vektor v^T sehingga diperoleh:

$$v(\tilde{A}_s \Sigma \tilde{A}_s^T + \tilde{B}_s \tilde{B}_s^T)v^T = v \Sigma v^T \quad (4.2.23)$$

Dengan melakukan operasi matriks pada Persamaan (4.2.23) maka didapatkan:

$$v\tilde{A}_s\Sigma\tilde{A}_s^Tv^T + v\tilde{B}_s\tilde{B}_s^Tv^T = v\Sigma v^T \quad (4.2.24)$$

Kemudian pada Persamaan (4.2.24), kumpulkan semua unsur yang memuat Σ pada ruas kiri dan semua unsur yang tidak memuat Σ diletakkan pada ruas kanan, sehingga diperoleh:

$$v\Sigma v^T - v\tilde{A}_s\Sigma\tilde{A}_s^Tv^T = v\tilde{B}_s\tilde{B}_s^Tv^T \quad (4.2.25)$$

Substitusikan Persamaan (4.2.21) dan (4.2.22) ke dalam Persamaan (4.2.25), sehingga diperoleh:

$$v\Sigma v^T - v\lambda\Sigma\lambda^Tv^T = v\tilde{B}_s\tilde{B}_s^Tv^T \quad (4.2.26)$$

Nilai λ merupakan konstanta, maka Persamaan (4.2.26) dapat ditulis menjadi:

$$(1 - |\lambda|^2)v\Sigma v^T = v\tilde{B}_s\tilde{B}_s^Tv^T \geq 0 \quad (4.2.27)$$

Persamaan (4.2.27) hanya dipenuhi jika:

$$1 - |\lambda|^2 \geq 0$$

atau

$$|\lambda| \leq 1$$

Selanjutnya, jika diambil $|\lambda| = 1$, maka dari Persamaan (4.2.27) dapat diperoleh:

$$v\tilde{B}_s\tilde{B}_s^Tv^T = 0 \quad (4.2.28)$$

Persamaan (4.2.27) hanya dipenuhi jika:

$$v\tilde{B}_s = 0 \quad (4.2.29)$$

Berdasarkan Persamaan (4.2.21) maka jelas terlihat bahwa jika diambil $|\lambda|=1$ maka v merupakan vektor eigen kiri dari matriks \tilde{A}_s . Selanjutnya, berdasarkan Persamaan (4.2.29) maka dapat dilihat bahwa dengan mengambil $|\lambda|=1$ maka vektor v merupakan *Kernel* dari \tilde{B}_s .

Sehingga berdasarkan Persamaan (4.2.21) dan (4.2.29), terlihat bahwa dengan mengambil $|\lambda|=1$ maka diperoleh v yang merupakan vektor eigen kiri dari \tilde{A}_s dan sebagian *Kernel* dari \tilde{B}_s . Menurut **Teorema 4.1.1**, hal ini kontradiksi dan haruslah $|\lambda|<1$, yang berarti bahwa haruslah nilai eigen dari \tilde{A}_s kurang dari 1. Sehingga terbukti bahwa sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ adalah stabil asimtotik.

Keterkendalian Sistem Setimbang

Keterkendalian sistem setimbang dapat ditunjukkan melalui gramian keterkendalian dari sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$. Sistem setimbang mempunyai gramian keterkendalian yang merupakan gramian kesetimbangan.

Berdasarkan Persamaan (4.2.17) dapat dilihat bahwa Σ merupakan solusi tunggal dari persamaan Lyapunov. Selanjutnya berdasarkan Persamaan (4.2.19) dapat dilihat bahwa Σ adalah definit positif. Sehingga menurut **Teorema 2.2.4**, maka terbukti bahwa Σ merupakan gramian keterkendalian dari sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$.

Keteramatan Sistem Setimbang

Keteramatan sistem setimbang dapat ditunjukkan melalui gramian keteramatan dari sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$. Sistem setimbang mempunyai gramian keteramatan yang merupakan gramian kesetimbangan.

Berdasarkan Persamaan (4.2.18) dapat dilihat bahwa Σ merupakan solusi tunggal dari persamaan Lyapunov.

Selanjutnya berdasarkan Persamaan (4.2.19) dapat dilihat bahwa Σ adalah definit positif. Sehingga menurut **Teorema 2.2.4**, maka terbukti bahwa Σ merupakan gramian keteramatan dari sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$.

4.3 Reduksi Model dengan HNA

Reduksi model merupakan upaya untuk mengganti model atau sistem yang berukuran besar dengan model yang sederhana tanpa kesalahan yang signifikan. Pada reduksi model dengan metode *Hankel Norm Approximation* (HNA) digunakan sistem stabil asimtotik, terkendali dan teramati. Diasumsikan bahwa sistem yang dinyatakan oleh Persamaan (2.2.1) merupakan sistem yang stabil asimtotik, terkendali, dan teramati yang disebut dengan sistem (A_s, B_s, C_s, D_s) .

4.3.1 Pembentukan Sistem Tereduksi

Sistem tereduksi adalah suatu model pendekatan yang diperoleh dari proses reduksi model. Reduksi model merupakan upaya untuk mengganti model atau sistem yang berukuran besar dengan model yang lebih sederhana tanpa kesalahan yang signifikan. Sistem tereduksi ini mempunyai perilaku atau sifat yang hampir sama dengan sistem semula.

Pembentukan sistem tereduksi $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ pada penelitian ini dengan menggunakan metode *Hankel Norm Approximation* (HNA). Pembentukan sistem tereduksi dari sistem (A_s, B_s, C_s, D_s) diawali dengan pembentukan sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$.

Setelah diperoleh sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dengan gramian keterkendalian \tilde{W} dan gramian keteramatan \tilde{M} sama dengan gramian kesetimbangan Σ , dilakukan reduksi model dengan metode *Hankel Norm Approximation* (HNA). Sebelumnya sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dipartisi sesuai

dengan gramian $\Sigma = \text{diag}(\Sigma_1, \Sigma_2)$. Σ_1 bersesuaian dengan nilai singular hankel besar sedangkan Σ_2 bersesuaian dengan nilai singular hankel kecil atau dapat dituliskan kembali sebagai berikut.

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{pmatrix} \quad (4.3.1)$$

dengan,

$$\Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$$

$$\Sigma_2 = \text{diag}(\sigma_{r+1}, \dots, \sigma_n)$$

Partisi pada Σ menyebabkan terjadinya partisi pada sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$, yaitu:

$$\tilde{G}_s = \left[\begin{array}{cc|c} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \tilde{B}_1 \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} & \tilde{B}_2 \\ \hline \tilde{C}_1 & \tilde{C}_2 & \tilde{D}_s \end{array} \right] \quad (4.3.2)$$

dengan,

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{A}_s = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix} \\ \tilde{B}_s = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{pmatrix} \\ \tilde{C}_s = \begin{pmatrix} \tilde{C}_1 & \tilde{C}_2 \end{pmatrix} \\ \tilde{D}_s = \begin{pmatrix} \tilde{D}_s \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (4.3.3)$$

sehingga berikut ini didapatkan suatu reduksi model dengan metode *Hankel Norm Approximation* (HNA)[7].

$$\tilde{A}_{sr} = \Gamma^{-1}(\sigma_{r+1}^2 \tilde{A}_{11}^T + \Sigma_1 \tilde{A}_{11} \Sigma_1 - \sigma_{r+1} \tilde{C}_1^T U \tilde{B}_1^T)$$

$$\tilde{B}_{sr} = \Gamma^{-1}(\Sigma_1 \tilde{B}_1 + \sigma_{r+1} \tilde{C}_1^T U)$$

$$\tilde{C}_{sr} = (\tilde{C}_1 \Sigma_1 + \sigma_{r+1} U \tilde{B}_1^T)$$

$$\tilde{D}_{sr} = \tilde{D}_s - \sigma_{r+1} U$$

dimana,

$$\Gamma = \Sigma_1^2 - \sigma_{r+1}^2 I$$

$$U = -\tilde{C}_2(\tilde{B}_2^T)^\perp$$

dimana \perp adalah pseudoinvers.

Pseudoinvers adalah operasi matriks yang sama seperti invers matriks. Namun bedanya kalau invers matriks dapat digunakan untuk matriks yang berbentuk persegi. Sedangkan pseudoinvers digunakan untuk matriks yang berbentuk bukan persegi. Misalkan diberikan B_2 matriks berbentuk bukan matriks persegi sehingga didapatkan pseudoinversnya adalah $B_2^\perp = (B_2^T B)^{-1} B^T$.

kemudian sistem tereduksi dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\begin{cases} \tilde{x}_{rk+1} &= \tilde{A}_{sr} \tilde{x}_{rk} + \tilde{B}_{sr} \tilde{u}_{rk} \\ \tilde{y}_{rk} &= \tilde{C}_{sr} \tilde{x}_{rk} + \tilde{D}_{sr} \tilde{u}_{rk} \end{cases} \quad (4.3.4)$$

Sistem tereduksi dengan menggunakan metode HNA yang mempunyai orde r memiliki sifat yang stabil, terkendali, dan teramati apabila memenuhi $\|G_s - G_{sr}\|_\infty \geq (\sigma_{r+1})$, dengan G_s dan G_{sr} masing-masing adalah fungsi transfer sistem (A_s, B_s, C_s, D_s) dan sistem tereduksinya[8].

G_s : Fungsi transfer sistem stabil

G_{sr} : Fungsi Transfer sistem tereduksi dengan HNA

Kestabilan Sistem Tereduksi

Stabilitas sistem tereduksi $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ dapat ditunjukkan melalui nilai eigen dari matriks \tilde{A}_{sr} . Persamaan Lyapunov dapat diperoleh dengan mensubsitusikan Persamaan (4.3.1) dan (4.3.3) ke dalam Persamaan (4.2.17) sehingga diperoleh:

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_{sr} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A}_{sr} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} \tilde{B}_{sr} \\ \tilde{B}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{B}_{sr} \\ \tilde{B}_2 \end{pmatrix}^T - \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (4.3.5)$$

Ukuran matriks-matriks pada Persamaan (4.3.5) sudah bersesuaian, sehingga operasi matriks pada Persamaan (4.3.5) dapat menghasilkan:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{sr}\Sigma_1\tilde{A}_{sr}^T + \tilde{A}_{12}\Sigma_2\tilde{A}_{12}^T + \tilde{B}_{sr}\tilde{B}_{sr}^T - \Sigma_1 &= 0 \\ \tilde{A}_{sr}\Sigma_1\tilde{A}_{21}^T + \tilde{A}_{12}\Sigma_2\tilde{A}_{22}^T + \tilde{B}_{sr}\tilde{B}_2^T &= 0 \\ \tilde{A}_{21}\Sigma_1\tilde{A}_{sr}^T + \tilde{A}_{22}\Sigma_2\tilde{A}_{12}^T + \tilde{B}_2\tilde{B}_{sr}^T &= 0 \\ \tilde{A}_{21}\Sigma_1\tilde{A}_{21}^T + \tilde{A}_{22}\Sigma_2\tilde{A}_{22}^T + \tilde{B}_2\tilde{B}_2^T - \Sigma_2 &= 0 \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

Dari Persamaan (4.3.6), misalkan diambil λ sebagai nilai eigen dari matriks \tilde{A}_{sr} dan $v \neq 0$ sebagai vektor eigen kiri yang berkaitan dengan λ , yang berarti dapat dituliskan kembali sebagai

$$v\tilde{A}_{sr} = v\lambda \quad (4.3.7)$$

atau

$$\tilde{A}_{sr}^T v^T = \lambda^T v^T \quad (4.3.8)$$

Selanjutnya, pada Persamaan (4.3.6) kalikan dari kiri dengan vektor v dan kalikan dari kanan dengan vektor v^T sehingga didapatkan:

$$v \left(\tilde{A}_{sr}\Sigma_1\tilde{A}_{sr}^T + \tilde{A}_{12}\Sigma_2\tilde{A}_{12}^T + \tilde{B}_{sr}\tilde{B}_{sr}^T \right) v^T = v\Sigma_1v^T \quad (4.3.9)$$

Dengan melakukan operasi matriks pada Persamaan (4.3.9) maka diperoleh:

$$v\tilde{A}_{sr}\Sigma_1\tilde{A}_{sr}^Tv^T + v\tilde{A}_{12}\Sigma_2\tilde{A}_{12}^Tv^T + v\tilde{B}_{sr}\tilde{B}_{sr}^Tv^T = v\Sigma_1v^T \quad (4.3.10)$$

Kemudian pada Persamaan (4.3.10), kumpulkan semua unsur yang memuat Σ_1 pada ruas kiri dan semua unsur yang tidak memuat Σ_1 ditempatkan pada ruas kanan, sehingga diperoleh:

$$v\Sigma_1v^T - v\tilde{A}_{sr}\Sigma_1\tilde{A}_{sr}^Tv^T = v\tilde{A}_{12}\Sigma_2\tilde{A}_{12}^Tv^T + v\tilde{B}_{sr}\tilde{B}_{sr}^Tv^T \quad (4.3.11)$$

Substitusikan Persamaan (4.3.7) dan (4.3.8) ke dalam Persamaan (4.3.11), sehingga diperoleh:

$$v\Sigma_1v^T - v\lambda\Sigma_1\lambda^Tv^T = v\tilde{A}_{12}\Sigma_2\tilde{A}_{12}^Tv^T + v\tilde{B}_{sr}\tilde{B}_{sr}^Tv^T \quad (4.3.12)$$

Nilai λ merupakan konstanta, maka Persamaan (4.3.12) dapat ditulis menjadi:

$$(1 - |\lambda|^2)v\Sigma_1v^T = v\tilde{A}_{12}\Sigma_2\tilde{A}_{12}^Tv^T + v\tilde{B}_{sr}\tilde{B}_{sr}^Tv^T \geq 0 \quad (4.3.13)$$

Persamaan (4.3.13) hanya dipenuhi jika:

$$1 - |\lambda|^2 \geq 0$$

atau

$$|\lambda| \geq 1$$

Selanjutnya, jika diambil $|\lambda| = 1$, maka dari Persamaan (4.3.13) didapatkan:

$$v\tilde{A}_{12}\Sigma_2\tilde{A}_{12}^Tv^T + v\tilde{B}_{sr}\tilde{B}_{sr}^Tv^T = 0 \quad (4.3.14)$$

Persamaan (4.3.13) hanya dipenuhi jika:

$$v\tilde{A}_{12} = 0 \quad (4.3.15)$$

$$v\tilde{B}_{sr} = 0 \quad (4.3.16)$$

Kemudian dipilih vektor $(v \ 0)$ sebagai vektor eigen kiri dari \tilde{A}_{sr} , maka dapat dirumuskan:

$$(v \ 0) \tilde{A}_{sr} = (v \ 0) \lambda \quad (4.3.17)$$

Jika diambil \tilde{A}_{sr} sesuai dengan Persamaan (4.3.3), maka Persamaan (4.3.17) menghasilkan:

$$(v \ 0) \begin{pmatrix} \tilde{A}_{sr} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix} = (v \ 0) \lambda$$

$$(v\tilde{A}_{sr} \ v^T\tilde{A}_{12}) = (v \ 0) \lambda \quad (4.3.18)$$

Selanjutnya pada Persamaan (4.3.15) disubsitusikan ke dalam Persamaan (4.3.18), sehingga diperoleh:

$$(v\tilde{A}_{sr} \ 0) = (v \ 0) \quad (4.3.19)$$

Berdasarkan Persamaan (4.3.19) maka jelas terlihat bahwa jika diambil $|\lambda| = 1$ maka $(v \ 0)$ merupakan vektor eigen kiri dari matriks \tilde{A}_{sr} . Selanjutnya jika vektor $(v \ 0)$ dikalikan dengan matriks \tilde{B}_{sr} , maka didapatkan:

$$(v \ 0) \begin{pmatrix} \tilde{B}_{sr} \\ \tilde{B}_2 \end{pmatrix} = v\tilde{B}_{sr} \quad (4.3.20)$$

Subsitusikan Persamaan (4.3.16) ke dalam Persamaan (4.3.17) maka didapatkan:

$$(v \ 0) \begin{pmatrix} \tilde{B}_{sr} \\ \tilde{B}_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (4.3.21)$$

Berdasarkan Persamaan (4.3.21) dapat dilihat bahwa dengan mengambil $|\lambda| = 1$ maka vektor $(v \ 0)$ merupakan kernel dari \tilde{B}_{sr} . Sehingga berdasarkan Persamaan (4.3.19)

dan (4.3.20), terlihat bahwa dengan mengambil $|\lambda| = 1$ maka vektor $(v \ 0)$ adalah merupakan vektor eigen kiri dari \tilde{A}_{sr} dan sebagai kernel kiri dari \tilde{B}_s . Menurut **Teorema 4.1.1**, hal ini kontradiksi dan haruslah $|\lambda| < 1$, yang berarti bahwa haruslah nilai eigen dari \tilde{A}_{sr} kurang dari 1. Sehingga terbukti bahwa sistem tereduksi $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ adalah stabil asimtotik.

Keterkendalian Sistem Tereduksi

Keterkendalian sistem tereduksi $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ dapat ditunjukkan melalui gramian keterkendalian dari sistem tereduksi $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$. Dimana ditunjukkan bahwa Σ_1 merupakan gramian keterkendalian dari sistem tereduksi $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$. Variabel keadaan yang bersesuaian dengan nilai singular Hankel kecil didefinisikan sebagai mode cepat, sedangkan variabel keadaan yang bersesuaian dengan nilai singular Hankel yang lebih besar didefinisikan sebagai mode lambat.

Sebagaimana yang telah diketahui bahwa Σ_2 bersesuaian dengan mode cepat (nilai singular Hankel kecil), maka dapat diasumsikan:

$$\tilde{A}_{12}\Sigma_2\tilde{A}_{12}^T \approx 0 \quad (4.3.22)$$

Substitusi Persamaan (4.3.22) ke dalam Persamaan (4.3.6), sehingga didapatkan:

$$\tilde{A}_{sr}\Sigma_1\tilde{A}_{sr}^T + \tilde{B}_{sr}\tilde{B}_{sr}^T - \Sigma_1 = 0 \quad (4.3.23)$$

Persamaan (4.3.23) merupakan persamaan Lyapunov untuk Σ_1 . Selanjutnya ditunjukkan bahwa Σ_1 merupakan solusi tunggal dari Persamaan (4.3.23). Misalkan diambil Σ_3 yang juga merupakan solusi dari Persamaan (4.3.22), maka berlaku:

$$\tilde{A}_{sr}\Sigma_3\tilde{A}_{sr}^T + \tilde{B}_{sr}\tilde{B}_{sr}^T - \Sigma_3 = 0 \quad (4.3.24)$$

Dari Persamaan (4.3.23) dan (4.3.24) diperoleh:

$$\begin{aligned}\tilde{A}_{sr}\Sigma_1\tilde{A}_{sr}^T + \tilde{B}_{sr}\tilde{B}_{sr}^T - \Sigma_1 &= \tilde{A}_{sr}\Sigma_3\tilde{A}_{sr}^T + \tilde{B}_{sr}\tilde{B}_{sr}^T - \Sigma_3 \\ \tilde{A}_{sr}\Sigma_1\tilde{A}_{sr}^T - \tilde{A}_{sr}\Sigma_3\tilde{A}_{sr}^T &= \Sigma_1 - \Sigma_3\end{aligned}$$

menghasilkan,

$$\tilde{A}_{sr}(\Sigma_1 - \Sigma_3)\tilde{A}_{sr}^T = \Sigma_1 - \Sigma_3 \quad (4.3.25)$$

Selanjutnya, misalkan diambil λ sebagai nilai eigen dari matriks \tilde{A}_{sr} dan $v \neq 0$ sebagai vektor eigen kiri yang berkaitan dengan λ , yang berarti:

$$v\tilde{A}_{sr} = v\lambda \quad (4.3.26)$$

atau

$$\tilde{A}_{sr}^T v^T = \lambda^T v^T \quad (4.3.27)$$

Kemudian pada Persamaan (4.3.25) dikalikan dari kiri dengan v dan dikalikan dari kanan dengan v^T , sehingga diperoleh:

$$v\tilde{A}_{sr}(\Sigma_1 - \Sigma_3)\tilde{A}_{sr}^T v^T = v(\Sigma_1 - \Sigma_3)v^T \quad (4.3.28)$$

Substitusikan Persamaan (4.3.26) dan (4.3.27) ke dalam Persamaan (4.3.28), sehingga diperoleh:

$$v\lambda(\Sigma_1 - \Sigma_3)\lambda^T v^T = v(\Sigma_1 - \Sigma_3)v^T \quad (4.3.29)$$

Nilai λ adalah konstanta, sehingga Persamaan (4.3.29) dapat dituliskan kembali menjadi:

$$(|\lambda^2| - 1)v(\Sigma_1 - \Sigma_3)v^T = 0 \quad (4.3.30)$$

Persamaan (4.3.30) hanya dipenuhi jika $\Sigma_1 - \Sigma_3 = 0$ atau $\Sigma_1 = \Sigma_3$, maka terbukti bahwa Σ_1 merupakan solusi tunggal dari Persamaan (4.3.23).

Dari uraian diatas, telah ditunjukkan bahwa Σ_1 definit positif dan merupakan solusi tunggal dari persamaan Lyapunov $\tilde{A}_{sr}\Sigma_1\tilde{A}_{sr}^T + \tilde{B}_{sr}\tilde{B}_{sr}^T - \Sigma_1 = 0$. Sehingga menurut **Teorema 2.2.4**, maka terbukti bahwa Σ_1 merupakan gramian keterkendalian dari sistem tereduksi $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$.

Keteramatan Sistem Tereduksi

Keteramatan sistem tereduksi dapat ditunjukkan melalui gramian keteramatan dari sistem tereduksi $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$. Dimana ditunjukkan bahwa Σ_1 merupakan gramian keteramatan dari sistem tereduksi tereduksi $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$. Persamaan Lyapunov untuk keteramatan dapat diperoleh dengan cara mensubsitusikan Persamaan (4.3.1) dan (4.3.3) ke dalam Persamaan (4.2.17), yaitu:

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_{sr} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A}_{sr} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix} + \\ \begin{pmatrix} \tilde{C}_{sr} & \tilde{C}_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \tilde{C}_{sr} & \tilde{C}_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (4.3.31)$$

Ukuran matriks-matriks pada Persamaan (4.3.31) sudah bersesuaian, sehingga operasi matriks pada Persamaan (4.3.31) dapat menghasilkan:

$$\tilde{A}_{sr}^T \Sigma_1 \tilde{A}_{sr} + \tilde{A}_{21}^T \Sigma_2 \tilde{A}_{21} + \tilde{C}_{sr}^T \tilde{C}_{sr} - \Sigma_1 = 0 \quad (4.3.32)$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{sr}^T \Sigma_1 \tilde{A}_{12} + \tilde{A}_{21}^T \Sigma_2 \tilde{A}_{22} + \tilde{C}_{sr}^T \tilde{C}_2 &= 0 \\ \tilde{A}_{12}^T \Sigma_1 \tilde{A}_{sr} + \tilde{A}_{22}^T \Sigma_2 \tilde{A}_{21} + \tilde{C}_2^T \tilde{C}_{sr} &= 0 \\ \tilde{A}_{12}^T \Sigma_1 \tilde{A}_{12} + \tilde{A}_{22}^T \Sigma_2 \tilde{A}_{22} + \tilde{C}_2^T \tilde{C}_2 - \Sigma_2 &= 0 \end{aligned}$$

dari Persamaan (4.3.32) didapatkan:

$$\tilde{A}_{sr}^T \Sigma_1 \tilde{A}_{sr} + \tilde{A}_{21}^T \Sigma_2 \tilde{A}_{21} + \tilde{C}_{sr}^T \tilde{C}_{sr} = \Sigma_1 \quad (4.3.33)$$

karena $\tilde{A}_{21}^T \Sigma_2 \tilde{A}_{21}$ dapat dianggap sama dengan nol, maka Persamaan (4.3.33) dapat dituliskan kembali menjadi:

$$\tilde{A}_{sr}^T \Sigma_1 \tilde{A}_{sr} + \tilde{C}_{sr}^T \tilde{C}_{sr} - \Sigma_1 = 0 \quad (4.3.34)$$

Persamaan (4.3.32) merupakan persamaan Lyapunov untuk gramian keteramatan. Selanjutnya ditunjukkan bahwa

Σ_1 merupakan solusi tunggal dari Persamaan (4.3.34). Misalkan diambil Σ_4 yang juga merupakan solusi dari Persamaan (4.3.34), maka berlaku:

$$\tilde{A}_{sr}^T \Sigma_4 \tilde{A}_{sr} + \tilde{C}_{sr}^T \tilde{C}_{sr} - \Sigma_4 = 0 \quad (4.3.35)$$

dari Persamaan (4.3.34) dan (4.3.35) didapatkan:

$$\tilde{A}_{sr}^T \Sigma_1 \tilde{A}_{sr} + \tilde{C}_{sr}^T \tilde{C}_{sr} - \Sigma_1 = \tilde{A}_{sr}^T \Sigma_4 \tilde{A}_{sr} + \tilde{C}_{sr}^T \tilde{C}_{sr} - \Sigma_4$$

atau

$$\tilde{A}_{sr}^T \Sigma_1 \tilde{A}_{sr} - \tilde{A}_{sr}^T \Sigma_4 \tilde{A}_{sr} = \Sigma_1 - \Sigma_4 \quad (4.3.36)$$

Persamaan (4.3.36) dapat dituliskan kembali sebagai:

$$\tilde{A}_{sr}^T (\Sigma_1 - \Sigma_4) - \tilde{A}_{sr} = \Sigma_1 - \Sigma_4 \quad (4.3.37)$$

Selanjutnya, misalkan diambil λ sebagai nilai eigen dari matriks \tilde{A}_{sr} dan $v \neq 0$ sebagai vektor eigen kanan yang berkaitan dengan λ , yang berarti:

$$\tilde{A}_{sr} v = \lambda v \quad (4.3.38)$$

atau

$$v^T \tilde{A}_{sr}^T = v^T \lambda^T \quad (4.3.39)$$

Selanjutnya kalikan dari kiri Persamaan (4.3.37) dengan v^T dan kalikan dari kanan dengan v sehingga diperoleh:

$$v^T \tilde{A}_{sr}^T (\Sigma_1 - \Sigma_4) \tilde{A}_{sr} v = v^T (\Sigma_1 - \Sigma_4) v \quad (4.3.40)$$

substitusi Persamaan (4.3.38) dan (4.3.39) ke dalam Persamaan (4.40), sehingga menghasilkan:

$$v^T \lambda^T (\Sigma_1 - \Sigma_4) \lambda v = v^T (\Sigma_1 - \Sigma_4) v \quad (4.3.41)$$

Nilai λ adalah konstanta, sehingga Persamaan (4.3.41) dapat dituliskan kembali menjadi:

$$(|\lambda^2| - 1)v^T(\Sigma_1 - \Sigma_4)v = 0 \quad (4.3.42)$$

Persamaan (4.3.42) hanya dipenuhi jika $\Sigma_1 - \Sigma_4 = 0$ atau $\Sigma_1 = \Sigma_4$. Jadi terbukti bahwa Σ_1 merupakan solusi tunggal dari persamaan Lyapunov yang dinyatakan pada Persamaan (4.3.34). Berdasarkan pembahasan di atas, telah ditunjukkan bahwa Σ_1 definit positif dan merupakan solusi tunggal dari Persamaan $\tilde{A}_{sr}^T \Sigma_1 \tilde{A}_{sr} + \tilde{C}_{sr}^T \tilde{C}_{sr} - \Sigma_1 = 0$, maka menurut **Teorema 2.2.4**, dapat disimpulkan bahwa Σ_1 merupakan gramian keteramatan dari sistem tereduksi $\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$.

4.4 Simulasi

Matriks Diagonal (Simulasi 1)

Pada simulasi ini, diambil sistem awal (A, B, C, D) yang merupakan sistem linier waktu diskrit sebagai berikut :

Sistem Awal

$$A = \begin{pmatrix} 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.05 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0.9 \\ 0.8 \\ 0.7 \\ 0.6 \\ 0.5 \\ 0.4 \\ 0.3 \\ 0.2 \\ 0.1 \\ 0.05 \end{pmatrix}$$

$$C = (\quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad)$$

$$D = (\quad 1 \quad)$$

Selanjutnya diselidiki sifat-sifat dari sistem (A, B, C, D) yang berupa sifat kestabilan, keterkendalian, dan

keteramatan.

Kestabilan dari sistem awal (A, B, C, D) dapat ditentukan berdasarkan nilai $|\lambda|$ dari eigen matriks A seperti yang disajikan pada Tabel 4.1 berikut.

Tabel 4.1: Nilai Eigen dari Sistem Awal (A, B, C, D)

i	$ \sigma_i $
1	0.05
2	0.1
3	0.2
4	0.3
5	0.4
6	0.5
7	0.6
8	0.7
9	0.8
10	0.9

Berdasarkan Tabel 4.1, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks A bernilai kurang dari 1, sehingga berdasarkan **Teorema 2.2.1** sistem awal (A, B, C, D) adalah sistem yang stabil asimtotik.

Keterkendalian sistem awal (A, B, C, D) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian M_c . Dengan menggunakan software MATLAB R2013a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian M_c pada sistem awal (A, B, C, D) adalah 10. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.2** sistem awal (A, B, C, D) adalah terkendali.

Keteramatan sistem awal (A, B, C, D) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan M_o . Dengan menggunakan software MATLAB R2013a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan M_o pada sistem awal

(A, B, C, D) adalah 10. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.3** sistem awal (A, B, C, D) adalah teramati.

Karena sistem awal yang dibangun adalah sistem yang stabil asimtotik, terkendali dan teramati sehingga berdasarkan **Teorema 2.2.4**, didapatkan gramian keterkendalian W dan gramian keteramatan M . Selanjutnya dibentuk suatu sistem setimbang.

Sistem Setimbang

Selanjutnya adalah membentuk sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dari sistem stabil digunakan software MATLAB R2013a, didapatkan sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ sebagai berikut:

$$\vec{A}_s = \begin{pmatrix} 0.76213 & -0.1699 & -0.0424 & -0.0064 & -0.0006 & -0.00005 & -0.000003 & -0.0000001 & -0.000000006 & 0.0000000001 \\ -0.1699 & 0.6059 & -0.2075 & -0.400 & -0.0046 & -0.003 & -0.0002 & -0.000001 & -0.00000005 & 0.000000001 \\ -0.0424 & -0.2075 & 0.5359 & -0.2122 & -0.0327 & -0.0030 & -0.0002 & -0.000001 & -0.00000004 & 0.000000001 \\ -0.0064 & -0.400 & -0.2122 & 0.4900 & -0.2037 & -0.0251 & -0.0019 & -0.0001 & -0.000004 & 0.00000001 \\ -0.0006 & -0.0046 & -0.0327 & -0.2037 & 0.4583 & -0.1872 & -0.0183 & -0.0011 & -0.00004 & 0.00000001 \\ -0.00005 & -0.0003 & -0.0030 & -0.0251 & -0.1872 & 0.4308 & -0.1682 & -0.0128 & -0.1505 & 0.00001 \\ -0.000003 & -0.0002 & -0.0002 & -0.0019 & -0.0183 & -0.1682 & 0.3973 & -0.1505 & -0.0086 & 0.00025 \\ -0.0000001 & -0.000001 & -0.00001 & -0.0001 & -0.0011 & -0.0128 & -0.1505 & 0.3490 & -0.1368 & 0.0050 \\ -0.000000006 & -0.00000005 & -0.0000004 & -0.000004 & -0.00004 & -0.0005 & -0.0086 & -0.1368 & 0.2809 & 0.1167 \\ 0.0000000001 & 0.000000001 & 0.00000001 & 0.0000001 & 0.000001 & 0.00001 & 0.00025 & 0.0050 & 0.1168 & 0.2394 \end{pmatrix}$$

$$\vec{B}_s = \begin{pmatrix} -2.0141 & -0.6885 & -0.1372 & -0.0019 & -0.0001 & -0.00009 & -0.000004 & -0.0000001 & 0.000000004 \\ -0.6885 & -0.1372 & -0.0019 & -0.0001 & -0.00009 & -0.000004 & -0.0000001 & 0.000000004 \\ -0.1372 & -0.0019 & -0.0001 & -0.00009 & -0.000004 & -0.0000001 & 0.000000004 \\ -0.0019 & -0.0001 & -0.00009 & -0.000004 & -0.0000001 & 0.000000004 \\ -0.0001 & -0.00009 & -0.000004 & -0.0000001 & 0.000000004 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C}_s = (-2.0141 \quad -0.6885 \quad -0.1372 \quad -0.0192 \quad -0.0019 \quad -0.0001 \quad -0.00009 \quad -0.000004 \quad -0.0000001 \quad 0.000000004)$$

$$\vec{D}_s = (1)$$

Selanjutnya dicari gramian keterkendalian \tilde{W} dan gramian keteramatan \tilde{M} dari sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$, sehingga diperoleh:

$$\tilde{W} = \begin{pmatrix} 9.7616 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2030 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1245 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0109 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0007 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.00004 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.000001 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.00000005 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.000000001 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0000000002 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} 9.7616 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2030 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1245 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0109 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0007 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.00004 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.000001 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.00000005 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.000000001 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0000000002 & 0 \end{pmatrix}$$

Dapat dilihat bahwa nilai dari $\tilde{W} = \tilde{M}$ yang sama artinya dengan $\tilde{W} = \tilde{M} = \Sigma$, dengan $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$, dengan σ adalah nilai singular Hankel, maka didapatkan nilai singular Hankel seperti yang disajikan pada Tabel 4.2 berikut.

Tabel 4.2: Nilai Singular Hankel

i	$ \sigma_i $
1	9.7616
2	1.2030
3	0.1245
4	0.0109
5	0.0007
6	0.00004
7	0.000001
8	0.00000005
9	0.000000001
10	0.00000000002

Berdasarkan Tabel 4.2, terlihat bahwa semua nilai singular Hankel adalah positif dan determinan dari nilai singular Hankel tidak sama dengan 0.

Selanjutnya diselidiki sifat dari sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ yang berupa sifat kestabilan, keterkendalian, dan keteramatan.

Kestabilan dari sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dapat ditentukan berdasarkan nilai $|\lambda|$ dari eigen matriks \tilde{A}_s seperti yang disajikan pada Tabel 4.3 berikut.

Tabel 4.3: Nilai Eigen dari Sistem Setimbang

i	$ \lambda_i $
1	0.8999
2	0.8
3	0.05
4	0.1
5	0.6999
6	0.2
7	0.3
8	0.6
9	0.4
10	0.5

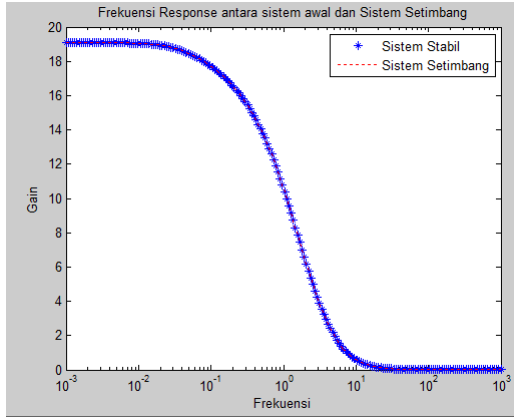
Berdasarkan Tabel 4.3, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks \tilde{A}_s seluruhnya mempunyai nilai kurang dari 1, sehingga berdasarkan **Teorema 2.2.1** sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ merupakan sistem yang stabil asimtotik.

Kemudian keterkendalian sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian \tilde{M}_c . Dengan menggunakan software MATLAB R2013a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian \tilde{M}_c pada sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ adalah 10. Sehingga berdasarkan **Teorema 2.2.2** sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ adalah sistem yang terkendali.

Keteramatan sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan \tilde{M}_o . Dengan menggunakan software MATLAB R2013a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan \tilde{M}_o pada sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ adalah 10. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.3** sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ adalah sistem yang teramati. Dengan demikian sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ merupakan

sistem yang stabil asimtotik, terkendali dan teramati.

Kemudian ditunjukkan frekuensi respon antara sistem stabil (A_s, B_s, C_s, D_s) dengan sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ yang disajikan pada Gambar 4.1 sebagai berikut.



Gambar 4.1: Frekuensi Respon antara Sistem Stabil (A_s, B_s, C_s, D_s) dan Sistem Setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$

Berdasarkan pada Gambar 4.1 dapat dilihat bahwa frekuensi respon antara Sistem Stabil (A_s, B_s, C_s, D_s) dan Sistem Setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ memiliki kesamaan, baik dalam frekuensi rendah maupun frekuensi tinggi.

Sebelum sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ direduksi dengan menggunakan metode HNA, maka di cek kembali syarat dimana dapat mereduksi sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$. Didapatkan hasil dari syarat orde berapa saja yang dapat dilakukan proses reduksi dengan HNA seperti Tabel 4.4 berikut.

Tabel 4.4: Syarat Orde Tereduksi dengan HNA Matriks Diagonal

Orde	$\ G_s - G_{sr}\ _\infty$	σ_{r+1}	$\ G_s - G_{sr}\ _\infty \geq \sigma_{r+1}$	waktu
1	2.33988	1.20305	Memenuhi	0.067727
2	0.36212	0.12454	Memenuhi	0.041889
3	0.04151	0.01098	Memenuhi	0.04408
4	0.00339	0.00079	Memenuhi	0.042605
5	0.00020	0.00004	Memenuhi	0.040412
6	0.000008	0.000001	Memenuhi	0.044494
7	0.0000002	0.00000005	Memenuhi	0.04485
8	0.00000005	0.000000001	Memenuhi	0.049357
9	0.0000004	0.0000000002	Memenuhi	0.048357

Berdasarkan Tabel 4.4 dapat disimpulkan bahwa reduksi model dengan HNA ($\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s$) dapat dilakukan ke bentuk orde 1,2,3,4,5,6,7,8 dan 9.

Reduksi Model dengan HNA Orde 5

Setelah didapatkan sistem setimbang ($\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s$), kemudian dilakukan reduksi model dengan metode HNA. Sistem setimbang ($\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s$) tersebut yang mempunyai orde 10 dapat dibentuk menjadi sistem tereduksi ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) yang mempunyai orde 5. Berikut ini merupakan sistem tereduksi ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$)

$$\tilde{A}_{sr} = \begin{pmatrix} 0.762139 & -0.020940 & -0.000541 & -0.000007 & -0.00000005 \\ -1.378684 & 0.605920 & -0.021478 & -0.000365 & -0.0000003 \\ -3.329489 & -2.004121 & 0.536023 & -0.018715 & -0.000207 \\ -5.713535 & -4.380093 & -2.405394 & 0.490214 & -0.014683 \\ -8.163831 & -7.036412 & -5.140390 & -2.832811 & 0.461508 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}_{sr} = \begin{pmatrix} -0.206326 \\ -0.572352 \\ -1.101934 \\ -1.741187 \\ -2.336720 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C}_{sr} = \begin{pmatrix} -19.660945 & -0.828392 & -0.017092 & -0.000210 & -0.000001 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{D}_{sr} = \begin{pmatrix} 1.000044 \end{pmatrix}$$

Kemudian dicek sifat-sifat sistemnya yang meliputi kestabilan, keterkendalian, dan keteramatan. Kestabilan dari sistem tereduksi orde 5 ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) dapat ditentukan

berdasarkan nilai λ dari sistem tereduksi $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ seperti yang disajikan pada Tabel 4.5 berikut.

Tabel 4.5: Nilai Eigen dari Sistem Tereduksi Orde 5

i	$ \lambda_i $
1	0.131283
2	0.399168
3	0.633982
4	0.899861
5	0.791510

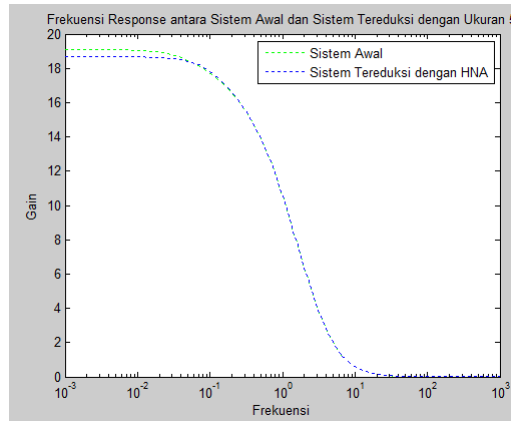
Berdasarkan Tabel 4.5, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks \tilde{A}_{sr} seluruhnya mempunyai nilai kurang dari 1, sehingga berdasarkan **Teorema 2.2.1** sistem tereduksi Orde 5 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ adalah sistem yang stabil asimtotik.

Kemudian dicek mengenai sifat keterkendalian dari sistem tereduksi $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$. Keterkendalian sistem tereduksi orde 5 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian \tilde{M}_c . Untuk mendapatkan *rank* dari matriks keterkendalian \tilde{M}_c dapat digunakan software MATLAB R2013a, sehingga didapatkan *rank* dari matriks keterkendalian \tilde{M}_c pada sistem tereduksi orde 5 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ adalah 5. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.2** sistem tereduksi orde 5 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ adalah terkendali.

Kemudian dicek mengenai sifat keteramatan dari sistem tereduksi $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$. Keteramatan sistem tereduksi orde 5 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan \tilde{M}_o . Untuk mendapatkan *rank* dari matriks keteramatan \tilde{M}_o dapat digunakan software MATLAB R2013a, sehingga didapatkan *rank* dari matriks keteramatan \tilde{M}_o pada sistem tereduksi orde 5 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ adalah

5. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.3** sistem tereduksi orde 5 ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) adalah teramati.

Kemudian berikut ini disajikan grafik frekuensi response antara sistem awal dengan sistem tereduksi orde 5 ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) dengan metode HNA seperti yang disajikan pada Gambar 4.2 berikut.



Gambar 4.2: Frekuensi Response antara Sistem Awal dan Sistem Tereduksi Orde 5 dengan HNA

Berdasarkan gambar 4.2, dapat dilihat bahwa ketika frekuensi rendah sistem tereduksi ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) orde 5 cenderung menjauhi sistem awal (A_s, B_s, C_s, D_s). Namun ketika frekuensi tinggi sistem awal dan sistem tereduksi cenderung mendekati sistem awal (A_s, B_s, C_s, D_s).

Kemudian disajikan nilai error dari sistem tereduksi orde 5 dalam bentuk Tabel 4.6 sebagai berikut.

$$B = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.7 \\ 0.6 \\ 0.9 \\ 0.4 \\ 0.8 \\ 0.2 \\ 0.1 \\ 0.5 \\ 0.3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya diselidiki sifat-sifat dari sistem (A, B, C, D) yang berupa sifat kestabilan, keterkendalian, dan keteramatan.

Kestabilan dari sistem awal (A, B, C, D) dapat ditentukan berdasarkan nilai $|\lambda|$ dari eigen matriks A seperti yang disajikan pada Tabel 4.7 berikut.

Tabel 4.7: Nilai Eigen dari Sistem Awal (A, B, C, D)

i	$ \sigma_i $
1	0.2
2	0.4
3	0.6
4	0.9
5	0.3
6	0.7
7	0.1
8	0.5
9	0.8
10	0.2

Berdasarkan Tabel 4.7, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks A bernilai kurang dari 1, sehingga berdasarkan **Teorema 2.2.1** sistem awal (A, B, C, D) adalah sistem yang stabil asimtotik.

Keterkendalian sistem awal (A, B, C, D) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian M_c . Dengan menggunakan software MATLAB R2013a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian M_c pada sistem awal (A, B, C, D) adalah 10. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.2** sistem awal (A, B, C, D) adalah terkendali.

Keteramatan sistem awal (A, B, C, D) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan M_o . Dengan menggunakan software MATLAB R2013a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan M_o pada sistem awal (A, B, C, D) adalah 10. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.3** sistem awal (A, B, C, D) adalah teramati.

Karena sistem awal yang dibangun adalah sistem yang stabil asimtotik, terkendali dan teramati sehingga berdasarkan **Teorema 2.2.4**, didapatkan gramian keterkendalian W dan gramian keteramatan M . Selanjutnya dibentuk suatu sistem setimbang.

Sistem Setimbang

Selanjutnya adalah membentuk sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dari sistem stabil digunakan software MATLAB R2013a, didapatkan sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ sebagai berikut:

$$\tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 0.978535 & 0.075042 & -0.025096 & 0.011713 & 0.002475 & 0.000213 & 0.000002 & 0.000001 & -0.000000003 & 0.000000005 \\ -0.075042 & 0.899259 & 0.152167 & -0.039592 & -0.009680 & -0.000793 & 0.000002 & 0.000004 & -0.000004 & -0.000000003 \\ -0.025096 & -0.152167 & 0.752715 & 0.225034 & 0.033622 & 0.003387 & 0.000036 & 0.000015 & -0.000000007 & 0.000000002 \\ -0.011713 & -0.039592 & -0.225034 & 0.537413 & -0.260563 & -0.012374 & -0.000342 & -0.000104 & 0.000000002 & -0.000000003 \\ 0.002475 & 0.009680 & 0.033622 & 0.260563 & 0.270183 & -0.201936 & 0.000903 & -0.000250 & 0.0000002 & -0.000000004 \\ -0.000213 & -0.000793 & -0.003387 & -0.012374 & 0.201936 & 0.003851 & -0.158139 & -0.035402 & 0.0000014 & -0.0000027 \\ 0.000002 & 0.000011 & 0.000036 & 0.000342 & 0.000903 & 0.158139 & 0.556929 & -0.266388 & 0.0001768 & -0.002501 \\ 0.000001 & 0.000004 & 0.000015 & 0.000104 & -0.000250 & 0.035400 & -0.266377 & 0.146770 & 0.032198 & -0.044524 \\ 0.000000005 & 0.00000002 & 0.00000008 & 0.00000003 & -0.000004 & 0.000031 & -0.002763 & -0.049100 & 0.668702 & 0.327277 \\ 0.000000003 & 0.00000001 & 0.00000006 & 0.00000002 & -0.000003 & 0.000025 & -0.001903 & -0.033265 & -0.483000 & -0.114362 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}_2 = \begin{pmatrix} -158.25309 \\ -194.37850 \\ -121.84085 \\ -46.99912 \\ 10.40455 \\ -0.87843 \\ 0.01210 \\ 0.00468 \\ 0.00002 \\ 0.00001 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C}_2 = \begin{pmatrix} -158.253092 & 194.378500 & -121.840858 & 46.999127 & 10.404553 & 0.878439 & 0.012106 & 0.004690 & -0.000014 & 0.000020 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{D}_2 = (1)$$

Selanjutnya dicari gramian keterkendalian \tilde{W} dan gramian keteramatan \tilde{M} dari sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$, sehingga diperoleh:

$$\tilde{W} = \begin{pmatrix} 619894.7073 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 221575.0469 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 47905.32144 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7194.871223 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 731.0076977 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 32.43034038 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.191304644 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.128102804 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.000538337 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.000301996 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} 619894.7073 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 221575.0469 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 47905.32144 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7194.871223 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 731.0076977 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 32.43034038 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.191304644 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.128102804 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.000538337 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.000301996 \end{pmatrix}$$

Dapat dilihat bahwa nilai dari $\tilde{W} = \tilde{M}$ yang sama artinya dengan $\tilde{W} = \tilde{M} = \Sigma$, dengan $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$, dengan σ adalah nilai singular Hankel, maka didapatkan nilai singular Hankel seperti yang disajikan pada Tabel 4.8 berikut.

Tabel 4.8: Nilai Singular Hankel

i	$ \sigma_i $
1	619894.7073
2	221575.0469
3	47905.32144
4	7194.871223
5	731.0076977
6	32.43034038
7	1.191304644
8	0.128102804
9	0.000538337
10	0.000301996

Berdasarkan Tabel 4.8, terlihat bahwa semua nilai singular Hankel adalah positif dan determinan dari nilai singular Hankel tidak sama dengan 0.

Selanjutnya diselidiki sifat dari sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ yang berupa sifat kestabilan, keterkendalian, dan keteramatan.

Kestabilan dari sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dapat ditentukan berdasarkan nilai $|\lambda|$ dari eigen matriks \tilde{A}_s seperti yang disajikan pada Tabel 4.9.

Berdasarkan Tabel 4.9, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks \tilde{A}_s seluruhnya mempunyai nilai kurang dari 1, sehingga berdasarkan **Teorema 2.2.1** sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ merupakan sistem yang stabil asimtotik.

Kemudian keterkendalian sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian \tilde{M}_c . Dengan menggunakan software MATLAB R2013a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian \tilde{M}_c pada sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$

Tabel 4.9: Nilai Eigen dari Sistem Setimbang

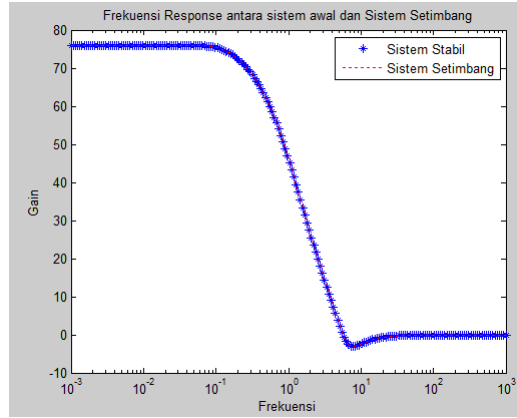
i	$ \lambda_i $
1	0.899999
2	0.8
3	0.699999
4	0.6
5	0.1
6	0.499999
7	0.199999
8	0.2
9	0.299999
10	0.4

adalah 10. Sehingga berdasarkan **Teorema 2.2.2** sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ adalah sistem yang terkendali.

Keteramatan sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan \tilde{M}_o . Dengan menggunakan software MATLAB R2013a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan \tilde{M}_o pada sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ adalah 10. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.3** sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ adalah sistem yang teramati. Dengan demikian sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ merupakan sistem yang stabil asimtotik, terkendali dan teramati.

Kemudian ditunjukkan frekuensi respon antara sistem stabil (A_s, B_s, C_s, D_s) dengan sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ yang disajikan pada Gambar 4.3.

Berdasarkan pada Gambar 4.3 dapat dilihat bahwa frekuensi respon antara Sistem Stabil (A_s, B_s, C_s, D_s) dan Sistem Setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ memiliki kesamaan, baik dalam frekuensi rendah maupun frekuensi tinggi.



Gambar 4.3: Frekuensi Respon antara Sistem Stabil (A_s, B_s, C_s, D_s) dan Sistem Setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$

Sebelum sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ direduksi dengan menggunakan metode HNA, maka di cek kembali syarat dimana dapat dilakukan reduksi pada sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$. Didapatkan hasil dari syarat orde berapa saja yang dapat dilakukan reduksi dengan HNA seperti Tabel 4.10 berikut.

Tabel 4.10: Syarat Orde Tereduksi dengan HNA Matriks Segitiga Atas

Orde	$\ G_s - G_{sr}\ _{\infty}$	σ_{r+1}	$\ G_s - G_{sr}\ _{\infty} \geq \sigma_{r+1}$	waktu
1	1131124.783	221575.0469	Memenuhi	0.072889
2	1383272.454	47905.32144	Memenuhi	0.050035
3	24429.83698	7194.871223	Memenuhi	0.054208
4	2321.909049	731.0076977	Memenuhi	0.050951
5	141.9437317	32.43034038	Memenuhi	0.050897
6	5.335636795	1.191304644	Memenuhi	0.051191
7	0.619793292	0.128102804	Memenuhi	0.052434
8	0.000680661	0.000538337	Memenuhi	0.0569
9	0.006468121	0.000301996	Memenuhi	0.088375

Berdasarkan Tabel 4.10 dapat disimpulkan bahwa reduksi model dengan HNA $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dapat dilakukan ke bentuk orde 1,2,3,4,5,6,7,8 dan 9.

Reduksi Model dengan HNA Orde 6

Setelah didapatkan sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$, kemudian dilakukan reduksi model dengan metode HNA. Sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ tersebut yang mempunyai orde 10 dapat dibentuk menjadi sistem tereduksi $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ yang mempunyai orde 6. Berikut ini merupakan sistem tereduksi $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$

$$\tilde{A}_{sr} = \begin{pmatrix} 0.978535 & 0.026823 & -0.002016 & 0.000135 & 0.000002 & 0.00000001 \\ -0.209944 & 0.899258 & 0.032898 & -0.001285 & -0.000032 & -0.0000001 \\ -0.337672 & -0.703802 & 0.752723 & 0.033800 & 0.000512 & 0.000002 \\ -1.009423 & -1.219506 & -1.498469 & 0.537362 & -0.026462 & -0.000056 \\ 2.095897 & 2.990292 & 2.200548 & 2.563484 & 0.270426 & -0.008978 \\ -4.240312 & -5.620287 & -5.132159 & -2.795882 & 4.568059 & 0.002986 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}_{sr} = \begin{pmatrix} -0.000255 \\ -0.000877 \\ -0.002543 \\ -0.006533 \\ 0.014210 \\ -0.028119 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C}_{sr} = \begin{pmatrix} -98100065.864 & 43069656.875 & -0.5836680.346 & 338208.657 & 7593.413 & 29.534 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{D}_{sr} = \begin{pmatrix} 2.1913055075 \end{pmatrix}$$

Kemudian dicek sifat-sifat sistemnya yang meliputi kestabilan, keterkendalian, dan keteramatan. Kestabilan dari sistem tereduksi orde 6 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ dapat ditentukan berdasarkan nilai λ dari sistem tereduksi $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ seperti yang disajikan pada Tabel 4.11.

Berdasarkan Tabel 4.11, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks \tilde{A}_{sr} seluruhnya mempunyai nilai kurang dari 1, sehingga berdasarkan **Teorema 2.2.1** sistem tereduksi Orde 6 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ adalah sistem yang stabil asimtotik.

Kemudian dicek mengenai sifat keterkendalian dari sistem tereduksi $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$. Keterkendalian sistem

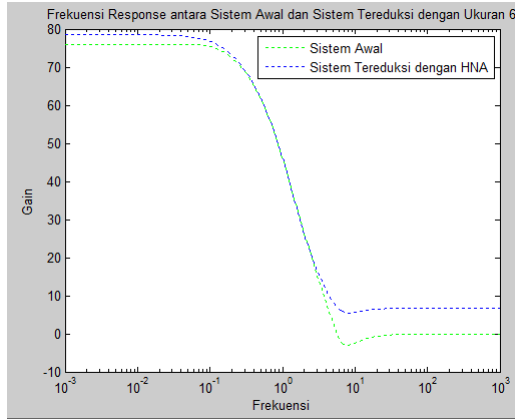
Tabel 4.11: Nilai Eigen dari Sistem Tereduksi Orde 6

i	$ \lambda_i $
1	0.899974
2	0.801110
3	0.668693
4	0.465894
5	0.465894
6	0.157691

tereduksi orde 6 ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian \tilde{M}_c . Untuk mendapatkan *rank* dari matriks keterkendalian \tilde{M}_c dapat digunakan software MATLAB R2013a, sehingga didapatkan *rank* dari matriks keterkendalian \tilde{M}_c pada sistem tereduksi orde 6 ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) adalah 6. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.2** sistem tereduksi orde 6 ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) adalah terkendali.

Kemudian dicek mengenai sifat keteramatan dari sistem tereduksi ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$). Keteramatan sistem tereduksi orde 6 ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan \tilde{M}_o . Untuk mendapatkan *rank* dari matriks keteramatan \tilde{M}_o dapat digunakan software MATLAB R2013a, sehingga didapatkan *rank* dari matriks keteramatan \tilde{M}_o pada sistem tereduksi orde 6 ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) adalah 6. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.3** sistem tereduksi orde 6 ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) adalah teramat.

Kemudian berikut ini disajikan grafik frekuensi response antara sistem awal dengan sistem tereduksi orde 6 ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) dengan metode HNA seperti yang disajikan pada Gambar 4.4 berikut.



Gambar 4.4: Frekuensi Response antara Sistem Awal dan Sistem Tereduksi Orde 6 dengan HNA

Berdasarkan gambar 4.4, dapat dilihat bahwa ketika frekuensi rendah sistem tereduksi ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) dengan HNA orde 6 cenderung mendekati sistem awal (A_s, B_s, C_s, D_s). Namun ketika frekuensi tinggi sistem tereduksi dengan HNA cenderung menjauhi sistem awal.

Kemudian disajikan nilai error dari sistem tereduksi orde 6 dalam bentuk Tabel 4.12 sebagai berikut.

Tabel 4.12: Nilai Error dari Sistem Tereduksi Orde 6

Frekuensi	HNA
1	3.1152879112
10	1.2030947498
100	1.1914244025

Dari Tabel 4.12, dapat dilihat bahwa nilai error sistem tereduksi dengan HNA orde 6 pada frekuensi rendah hingga tinggi memiliki nilai error yang semakin mengecil.

Berdasarkan hal tersebut didapatkan tingkat akurasinya semakin besar.

Matriks Segitiga Bawah (Simulasi 3)

Pada simulasi ini, akan diambil sistem awal (A, B, C, D) yang merupakan sistem linier waktu diskrit sebagai berikut:

Sistem Awal

$$A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.8 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.5 & 0.2 & 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.7 & 3 & 0.3 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 4 & 7 & 0.8 & 0.8 & 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 0.6 & 0.3 & 3 & 0.9 & 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.8 & 7 & 3 & 4 & 7 & 8 & 0.6 & 0.5 & 0 & 0 \\ 5 & 0.1 & 9 & 5 & 0.7 & 0.5 & 0.9 & 0.1 & 0.8 & 0 \\ 2 & 9 & 0.3 & 0.3 & 0.1 & 1 & 8 & 5 & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.7 \\ 0.6 \\ 0.9 \\ 0.4 \\ 0.8 \\ 0.2 \\ 0.1 \\ 0.5 \\ 0.3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya akan diselidiki sifat-sifat dari sistem (A, B, C, D) yang berupa sifat kestabilan, keterkendalian, dan keteramatan.

Kestabilan dari sistem awal (A, B, C, D) dapat ditentukan berdasarkan nilai $|\lambda|$ dari eigen matriks A seperti yang disajikan pada Tabel 4.13 berikut.

Tabel 4.13: Nilai Eigen dari Sistem Awal (A, B, C, D)

i	$ \sigma_i $
1	0.2
2	0.8
3	0.5
4	0.1
5	0.7
6	0.3
7	0.9
8	0.6
9	0.4
10	0.2

Berdasarkan Tabel 4.13, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks A bernilai kurang dari 1, sehingga berdasarkan **Teorema 2.2.1** sistem awal (A, B, C, D) adalah sistem yang stabil asimtotik.

Keterkendalian sistem awal (A, B, C, D) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian M_c . Dengan menggunakan software MATLAB R2013a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian M_c pada sistem awal (A, B, C, D) adalah 10. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.2** sistem awal (A, B, C, D) adalah terkendali.

Keteramatan sistem awal (A, B, C, D) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan M_o . Dengan menggunakan software MATLAB R2013a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan M_o pada sistem awal (A, B, C, D) adalah 10. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.3**

sistem awal (A, B, C, D) adalah teramati.

Karena sistem awal yang dibangun adalah sistem yang stabil asimtotik, terkendali dan teramati sehingga berdasarkan **Teorema 2.2.4**, didapatkan gramian keterkendalian W dan gramian keteramatan M . Selanjutnya akan ditentukan sistem setimbang.

Sistem Setimbang

Selanjutnya adalah membentuk sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dari sistem stabil digunakan software MATLAB R2013a, didapatkan sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ sebagai berikut:

$$\vec{A}_2 = \begin{pmatrix} 0.961241 & 0.128779 & 0.036938 & -0.018829 & -0.000088 & -0.002257 & 0.000012 & -0.000001 & 0.000001 & -0.0000000001 \\ -0.012879 & 0.817798 & -0.273576 & 0.050480 & -0.003805 & 0.009733 & -0.000012 & 0.000001 & -0.00000008 & 0.0000000001 \\ 0.036938 & 0.273576 & 0.616461 & 0.310661 & 0.016973 & 0.021982 & -0.000289 & 0.000039 & -0.0000023 & 0.000000004 \\ 0.018829 & 0.050480 & 0.003805 & 0.016973 & 0.315965 & 0.848097 & -0.001435 & 0.000206 & -0.000012 & 0.000000002 \\ -0.000088 & 0.003805 & 0.016973 & -0.315965 & 0.848097 & 0.243431 & -0.001209 & 0.000160 & -0.000009 & 0.000000001 \\ -0.002257 & 0.009733 & 0.021982 & 0.248946 & 0.243431 & -0.054919 & 0.037953 & -0.005209 & 0.000312 & 0.000000005 \\ 0.000012 & 0.000012 & -0.000289 & 0.001455 & -0.001209 & 0.037953 & 0.788941 & 0.065827 & -0.000312 & 0.0000008 \\ -0.000001 & -0.000001 & 0.000039 & -0.000206 & 0.000160 & -0.005209 & 0.065827 & -0.134637 & -0.299227 & -0.0000008 \\ 0.00000001 & 0.00000008 & 0.000002 & -0.000012 & 0.000009 & -0.000312 & 0.003654 & 0.299241 & -0.463007 & -0.011419 \\ -0.0000000002 & -0.0000000002 & 0.000000006 & -0.00000003 & 0.00000002 & -0.00000089 & 0.000014 & -0.003261 & 0.017642 & 0.159721 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -48.188050 \\ -58.532731 \\ 35.761650 \\ 13.331468 \\ 0.201089 \\ -1.839664 \\ 0.007683 \\ -0.001005 \\ -0.000060 \\ -0.0000001 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c}_2 = (-48.188050 \quad 58.532731 \quad 35.761650 \quad -13.331468 \quad 0.201089 \quad -1.839664 \quad 0.007683 \quad -0.001005 \quad 0.000060 \quad -0.0000001)$$

$$\vec{D}_2 = (1)$$

Selanjutnya akan dicari gramian keterkendalian \tilde{W} dan gramian keteramatan \tilde{M} dari sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$, sehingga diperoleh:

$$\tilde{W} = \begin{pmatrix} 33429.08973 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12880.3219 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3793.1467 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 653.1484 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 250.0838 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 62.0937 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2425 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0028 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.00033 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.00000009 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} 33429.0897 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12880.3219 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3793.1467 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 653.1484 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 250.0838 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 62.0937 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2425 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0028 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.00033 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.00000009 & 0 \end{pmatrix}$$

Dapat dilihat bahwa nilai dari $\tilde{W} = \tilde{M}$ yang sama artinya dengan $\tilde{W} = \tilde{M} = \Sigma$, dengan $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$, dengan σ adalah nilai singular Hankel, maka didapatkan nilai singular Hankel seperti yang disajikan pada Tabel 4.14 berikut.

Tabel 4.14: Nilai Singular Hankel

i	$ \sigma_i $
1	33429.08973
2	12880.3219
3	3793.1467
4	653.1484
5	250.0838
6	62.0937
7	0.2425
8	0.0028
9	0.00033
10	0.00000009

Berdasarkan Tabel 4.14, terlihat bahwa semua nilai singular Hankel adalah positif dan determinan dari nilai singular Hankel tidak sama dengan 0.

Selanjutnya akan diselidiki sifat dari sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ yang berupa sifat kestabilan, keterkendalian, dan keteramatan.

Kestabilan dari sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dapat ditentukan berdasarkan nilai $|\lambda|$ dari eigen matriks \tilde{A}_s seperti yang disajikan pada Tabel 4.15 berikut.

Tabel 4.15: Nilai Eigen dari Sistem Setimbang

i	$ \lambda_i $
1	0.9
2	0.799
3	0.7
4	0.599
5	0.5
6	0.399
7	0.299
8	0.1
9	0.2
10	0.199

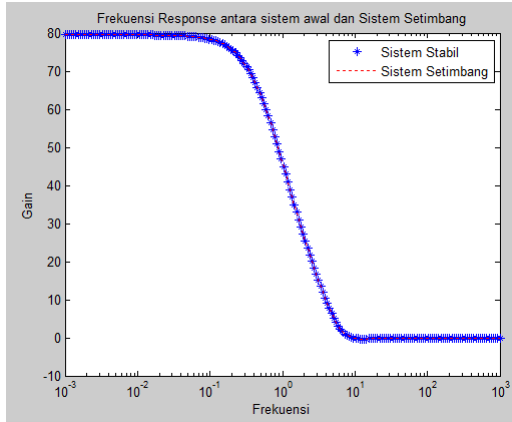
Berdasarkan Tabel 4.15, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks \tilde{A}_s seluruhnya mempunyai nilai kurang dari 1, sehingga berdasarkan **Teorema 2.2.1** sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ merupakan sistem yang stabil asimtotik.

Kemudian keterkendalian sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian \tilde{M}_c . Dengan menggunakan software MATLAB R2013a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian \tilde{M}_c pada sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ adalah 10. Sehingga berdasarkan **Teorema 2.2.2** sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ adalah sistem yang terkendali.

Keteramatan sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan \tilde{M}_o . Dengan menggunakan software MATLAB R2013a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan \tilde{M}_o pada sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ adalah 10. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.3** sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ adalah sistem yang teramati. Dengan demikian sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ merupakan

sistem yang stabil asimtotik, terkendali dan teramati.

Kemudian ditunjukkan frekuensi respon antara sistem stabil (A_s, B_s, C_s, D_s) dengan sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ yang disajikan pada Gambar 4.5 sebagai berikut.



Gambar 4.5: Frekuensi Respon antara Sistem Stabil (A_s, B_s, C_s, D_s) dan Sistem Setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$

Berdasarkan pada Gambar 4.5 dapat dilihat bahwa frekuensi respon antara Sistem Stabil (A_s, B_s, C_s, D_s) dan Sistem Setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ memiliki kesamaan, baik dalam frekuensi rendah maupun frekuensi tinggi.

Sebelum sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ direduksi dengan menggunakan metode HNA, maka akan di cek kembali syarat dimana sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dapat dilakukan reduksi. Berikut ini didapatkan hasil dari syarat orde berapa saja yang dapat dilakukan reduksi dengan HNA dan disajikan pada Tabel 4.16 berikut.

Tabel 4.16: Syarat Orde Tereduksi dengan HNA Matriks Segitiga Bawah

Orde	$\ G_s - G_{sr}\ _\infty$	σ_{r+1}	$\ G_s - G_{sr}\ _\infty \geq \sigma_{r+1}$	waktu
1	67674.6489	12880.3219	Memenuhi	0.058161
2	81675.73666	3793.146723	Memenuhi	0.039448
3	1900.258641	653.1484283	Memenuhi	0.047457
4	995.0434268	250.0838604	Memenuhi	0.045196
5	294.8418304	62.09376204	Memenuhi	0.044226
6	0.999966401	0.242579326	Memenuhi	0.043891
7	0.014208426	0.002859514	Memenuhi	0.043803
8	0.001562552	0.000337961	Memenuhi	0.051463
9	0.0000121089	0.00000009043	Memenuhi	0.043964

Berdasarkan Tabel 4.16 dapat disimpulkan bahwa reduksi model dengan HNA $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dapat dilakukan ke bentuk orde 1,2,3,4,5,6,7,8 dan 9.

Reduksi Model dengan HNA Orde 7

Setelah didapatkan sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$, kemudian dilakukan reduksi model dengan metode HNA. Sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ tersebut yang mempunyai orde 10 dapat dibentuk menjadi sistem tereduksi $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ yang mempunyai orde 7. Berikut ini merupakan sistem tereduksi $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$

$$\tilde{A}_{sr} = \begin{pmatrix} 0.961241 & 0.049619 & 0.004191 & -0.000367 & -0.0000006 & -0.000004 & 0.0000000009 \\ -0.334229 & 0.817798 & -0.080565 & 0.002559 & -0.000073 & 0.000046 & -0.0000000002 \\ 0.325536 & 0.928977 & 0.616461 & 0.053493 & 0.001119 & 0.000359 & -0.00000001 \\ 0.963739 & 0.995500 & -1.804161 & 0.234286 & 0.120979 & -0.023666 & -0.00000005 \\ -0.011784 & 0.195981 & 0.257440 & -0.825212 & 0.848097 & 0.060442 & -0.000001 \\ -1.215027 & -2.018979 & 1.342835 & 2.618584 & 0.980426 & -0.054916 & 0.000148 \\ 1.754150 & 0.646861 & -4.514201 & 3.924088 & -1.247352 & 9.715783 & 0.789163 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}_{sr} = \begin{pmatrix} -0.001441 \\ -0.004544 \\ 0.009427 \\ 0.020411 \\ 0.000804 \\ -0.029625 \\ 0.031309 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C}_{sr} = (-1610882.51 \quad 753920.58 \quad 135649.08 \quad -8707.46 \quad 50.28 \quad -114.22 \quad 0.0018)$$

$$\tilde{D}_{sr} = (1.002838)$$

Kemudian akan dicek sifat-sifat sistemnya yang meliputi kestabilan, keterkendalian, dan keteramatan. Kestabilan dari sistem tereduksi orde 7 ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) dapat ditentukan berdasarkan nilai λ dari sistem tereduksi ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) seperti yang disajikan pada Tabel 4.17 berikut.

Tabel 4.17: Nilai Eigen dari Sistem Tereduksi Orde 7

i	$ \lambda_i $
1	0.328503
2	0.385234
3	0.500043
4	0.899996
5	0.602306
6	0.698498
7	0.797548

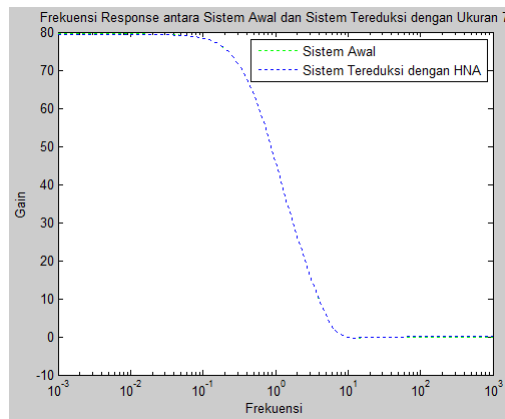
Berdasarkan Tabel 4.17, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks \tilde{A}_{sr} seluruhnya mempunyai nilai kurang dari 1, sehingga berdasarkan **Teorema 2.2.1** sistem tereduksi Orde 7 ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) adalah sistem yang stabil asimtotik.

Kemudian akan dicek mengenai sifat keterkendalian dari sistem tereduksi ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$). Keterkendalian sistem tereduksi orde 7 ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian \tilde{M}_c . Untuk mendapatkan *rank* dari matriks keterkendalian \tilde{M}_c dapat digunakan software MATLAB R2013a, sehingga didapatkan *rank* dari matriks keterkendalian \tilde{M}_c pada sistem tereduksi orde 7 ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) adalah 7. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.2** sistem tereduksi orde 7 ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) adalah terkendali.

Kemudian akan dicek mengenai sifat keteramatan dari sistem tereduksi ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$). Keteramatan sistem

tereduksi orde 7 ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan \tilde{M}_o . Untuk mendapatkan *rank* dari matriks keteramatan \tilde{M}_o dapat digunakan software MATLAB R2013a, sehingga didapatkan *rank* dari matriks keteramatan \tilde{M}_o pada sistem tereduksi orde 7 ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) adalah 7. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.3** sistem tereduksi orde 7 ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) adalah teramat.

Kemudian berikut ini akan disajikan grafik frekuensi response antara sistem awal dengan sistem tereduksi orde 7 ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) dengan metode HNA seperti yang disajikan pada Gambar 4.6 berikut.



Gambar 4.6: Frekuensi Response antara Sistem Awal dan Sistem Tereduksi Orde 7 dengan HNA

Berdasarkan gambar 4.6, dapat dilihat bahwa ketika frekuensi rendah sampai frekuensi tinggi sistem tereduksi orde 7 ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) dengan HNA cenderung mendekati sistem awal (A_s, B_s, C_s, D_s).

Kemudian disajikan nilai error dari sistem tereduksi orde

7 dalam bentuk Tabel 4.18 sebagai berikut.

Tabel 4.18: Nilai Error dari Sistem Tereduksi Orde 7

Frekuensi	HNA
1	0.0077849613
10	0.0028669718
100	0.0028390930

Dari Tabel 4.18, dapat dilihat bahwa nilai akurasi sistem tereduksi dengan HNA orde 7 pada frekuensi rendah hingga tinggi memiliki nilai error yang semakin mengecil. Berdasarkan hal tersebut didapatkan tingkat akurasi semakin besar.

Matriks Tridiagonal (Simulasi 4)

Pada simulasi ini, akan diambil sistem awal (A, B, C, D) yang merupakan sistem linier waktu diskrit sebagai berikut :

Sistem Awal

$$A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.4 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.1 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.1 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0.1 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0.4 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0.3 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.1 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0.1 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0.3 & 0.1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya akan diselidiki sifat-sifat dari sistem (A, B, C, D) yang berupa sifat kestabilan, keterkendalian, dan keteramatan.

Kestabilan dari sistem awal (A, B, C, D) dapat ditentukan berdasarkan nilai $|\lambda|$ dari eigen matriks A seperti yang disajikan pada Tabel 4.19 berikut.

Tabel 4.19: Nilai Eigen dari Sistem Awal (A, B, C, D)

i	$ \sigma_i $
1	0.556693
2	0.452971
3	0.296033
4	0.112464
5	0.849711
6	0.062121
7	0.737224
8	0.235788
9	0.605508
10	0.427808

Berdasarkan Tabel 4.19, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks A bernilai kurang dari 1, sehingga berdasarkan **Teorema 2.2.1** sistem awal (A, B, C, D) adalah sistem yang stabil asimtotik.

Keterkendalian sistem awal (A, B, C, D) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian M_c . Dengan menggunakan software MATLAB R2013a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian M_c pada sistem awal (A, B, C, D) adalah 10. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.2** sistem awal (A, B, C, D) adalah terkendali.

Keteramatan sistem awal (A, B, C, D) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan M_o . Dengan menggunakan software MATLAB R2013a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan M_o pada sistem awal (A, B, C, D) adalah 10. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.3** sistem awal (A, B, C, D) adalah teramati.

Karena sistem awal yang dibangun adalah sistem yang stabil asimtotik, terkendali dan teramati sehingga berdasarkan **Teorema 2.2.4**, didapatkan gramian keterkendalian W dan gramian keteramatan M . Selanjutnya akan ditentukan sistem setimbang.

Sistem Setimbang

Selanjutnya adalah membentuk sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dari sistem stabil digunakan software MATLAB R2013a, didapatkan sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ sebagai berikut:

$$\vec{A}_s = \begin{pmatrix} 0.496988 & 0.352788 & -0.061009 & 0.002697 & 0.000879 & -0.000108 & -0.000008 & 0.000002 & 0.00000005 & 0.00000001 \\ 0.422740 & 0.422740 & 0.247638 & -0.023868 & -0.002604 & 0.000606 & 0.000005 & -0.000010 & 0.00000018 & -0.00000007 \\ 0.247638 & 0.208975 & 0.345740 & 0.024662 & 0.350967 & 0.350563 & 0.000724 & 0.000033 & -0.0000102 & 0.0000003 \\ 0.002697 & -0.023868 & 0.146764 & 0.350967 & 0.145953 & -0.023803 & -0.004518 & 0.000637 & 0.000042 & 0.0000041 \\ 0.000879 & -0.002604 & -0.024662 & 0.350967 & 0.145953 & 0.350563 & -0.022776 & -0.004460 & 0.000408 & -0.000037 \\ -0.000108 & 0.000606 & -0.004373 & -0.023803 & 0.350563 & 0.142432 & 0.348348 & -0.018504 & -0.003997 & -0.000085 \\ -0.000008 & 0.000012 & 0.000724 & -0.004518 & -0.022776 & 0.348348 & 0.124477 & 0.337624 & 0.306110 & 0.002526 \\ 0.000002 & 0.000033 & 0.000637 & 0.000637 & -0.004460 & -0.018504 & 0.337624 & 0.068237 & 0.306110 & -0.003743 \\ 0.00000005 & -0.000010 & -0.000010 & 0.000042 & 0.000408 & -0.003997 & -0.008349 & 0.306110 & -0.043433 & -0.240976 \\ 0.00000001 & -0.00000007 & 0.0000003 & 0.000004 & -0.000037 & -0.000085 & 0.002526 & -0.003743 & -0.240976 & -0.213135 \end{pmatrix}$$

$$\vec{B}_s = \begin{pmatrix} -0.859390 & 0.247553 \\ -0.012805 & -0.01139 \\ 0.000308 & -0.000009 \\ -0.000053 & 0.000003 \\ 0.0000006 & 0.00000001 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C}_s = (-0.859390 \quad 0.247553 \quad -0.012805 \quad -0.001139 \quad 0.000308 \quad -0.000009 \quad -0.000005 \quad 0.000003 \quad 0.00000006 \quad 0.000000001)$$

$$\vec{D}_s = (1)$$

Dapat dilihat bahwa nilai dari $\tilde{W} = \tilde{M}$ yang sama artinya dengan $\tilde{W} = \tilde{M} = \Sigma$, dengan $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$, dengan σ adalah nilai singular Hankel, maka didapatkan nilai singular Hankel seperti yang disajikan pada Tabel 4.20 berikut.

Tabel 4.20: Nilai Singular Hankel

i	$ \sigma_i $
1	1.018998642
2	0.230476127
3	0.019234063
4	0.002535615
5	0.000339266
6	0.000045229
7	0.000005898
8	0.000000705
9	0.000000067
10	0.000000004

Berdasarkan Tabel 4.20, terlihat bahwa semua nilai singular Hankel adalah positif dan determinan dari nilai singular Hankel tidak sama dengan 0.

Selanjutnya akan diselidiki sifat dari sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ yang berupa sifat kestabilan, keterkendalian, dan keteramatan.

Kestabilan dari sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dapat ditentukan berdasarkan nilai $|\lambda|$ dari eigen matriks \tilde{A}_s seperti yang disajikan pada Tabel 4.21.

Berdasarkan Tabel 4.21, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks \tilde{A}_s seluruhnya mempunyai nilai kurang dari 1, sehingga berdasarkan **Teorema 2.2.1** sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ merupakan sistem yang stabil asimtotik.

Kemudian keterkendalian sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari

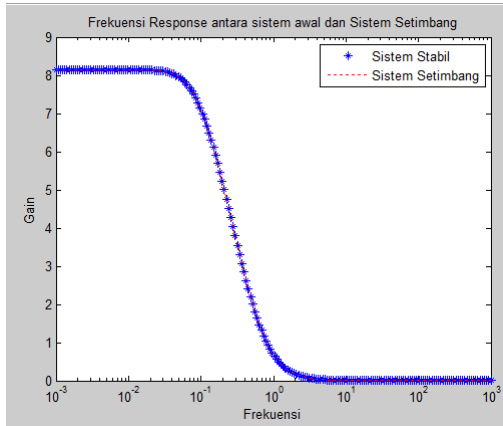
Tabel 4.21: Nilai Eigen dari Sistem Setimbang

i	$ \lambda_i $
1	0.556693
2	0.452971
3	0.296033
4	0.112464
5	0.849711
6	0.062121
7	0.737224
8	0.235788
9	0.605508
10	0.427808

matriks keterkendalian \tilde{M}_c . Dengan menggunakan software MATLAB R2013a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian \tilde{M}_c pada sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ adalah 10. Sehingga berdasarkan **Teorema 2.2.2** sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ adalah sistem yang terkendali.

Keteramatan sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan \tilde{M}_o . Dengan menggunakan software MATLAB R2013a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan \tilde{M}_o pada sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ adalah 10. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.3** sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ adalah sistem yang teramati. Dengan demikian sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ merupakan sistem yang stabil asimtotik, terkendali dan teramati.

Kemudian ditunjukkan frekuensi respon antara sistem stabil (A_s, B_s, C_s, D_s) dengan sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ yang disajikan pada Gambar 4.7 sebagai berikut.



Gambar 4.7: Frekuensi Respon antara Sistem Stabil (A_s, B_s, C_s, D_s) dan Sistem Setimbang ($\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s$)

Berdasarkan pada Gambar 4.7 dapat dilihat bahwa frekuensi respon antara Sistem Stabil (A_s, B_s, C_s, D_s) dan Sistem Setimbang ($\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s$) memiliki kesamaan, baik dalam frekuensi rendah maupun frekuensi tinggi.

Sebelum sistem setimbang ($\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s$) direduksi dengan menggunakan metode HNA, maka akan di cek kembali syarat dimana reduksi model pada sistem setimbang ($\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s$) dapat dilakukan. Berikut ini didapatkan hasil dari syarat orde berapa saja yang dapat dilakukan reduksi dengan HNA dan disajikan pada Tabel 4.22 berikut.

Berdasarkan Tabel 4.22 dapat disimpulkan bahwa reduksi model dengan HNA ($\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s$) dapat dilakukan ke bentuk orde 1,2,3,4,5,6,7,8 dan 9.

Tabel 4.22: Syarat Orde Tereduksi dengan HNA Tridiagonal

Orde	$\ G_s - G_{sr}\ _\infty$	σ_{r+1}	$\ G_s - G_{sr}\ _\infty \geq \sigma_{r+1}$	waktu
1	0.6233466602	0.230476127540	Memenuhi	0.071705
2	0.0861930667	0.019234063974	Memenuhi	0.048399
3	0.0128603787	0.002535615580	Memenuhi	0.050056
4	0.0017036974	0.000339266678	Memenuhi	0.033953
5	0.0002235332	0.000045229243	Memenuhi	0.042797
6	0.0000291591	0.000005898205	Memenuhi	0.03628
7	0.0000035212	0.000000705283	Memenuhi	0.03551
8	0.0000003433	0.000000067655	Memenuhi	0.039167
9	0.0000000215	0.000000004166	Memenuhi	0.075809

Reduksi Model dengan HNA Orde 4

Setelah didapatkan sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$, kemudian dilakukan reduksi model dengan metode HNA. Sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ tersebut yang mempunyai orde 10 dapat dibentuk menjadi sistem tereduksi $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ yang mempunyai orde 4. Berikut ini merupakan sistem tereduksi $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$

$$\tilde{A}_{sr} = \begin{pmatrix} 0.497229 & 0.079723 & -0.001147 & 0.000007 \\ 1.558421 & 0.423133 & 0.020646 & -0.000264 \\ -3.223141 & 2.965476 & 0.209255 & 0.045713 \\ 1.156667 & -2.224643 & 2.677526 & 0.152185 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}_{sr} = \begin{pmatrix} -0.843086 \\ 1.072515 \\ -0.654209 \\ -0.396237 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C}_{sr} = \begin{pmatrix} -0.875426 & 0.056971 & -0.000241 & -0.000002 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{D}_{sr} = \begin{pmatrix} 1.000339 \end{pmatrix}$$

Kemudian akan dicek sifat-sifat sistemnya yang meliputi kestabilan, keterkendalian, dan keteramatan. Kestabilan dari sistem tereduksi orde 4 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ dapat ditentukan berdasarkan nilai λ dari sistem tereduksi $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$

seperti yang disajikan pada Tabel 4.23.

Tabel 4.23: Nilai Eigen dari Sistem Tereduksi Orde 4

i	$ \lambda_i $
1	0.261793
2	0.137401
3	0.847067
4	0.559128

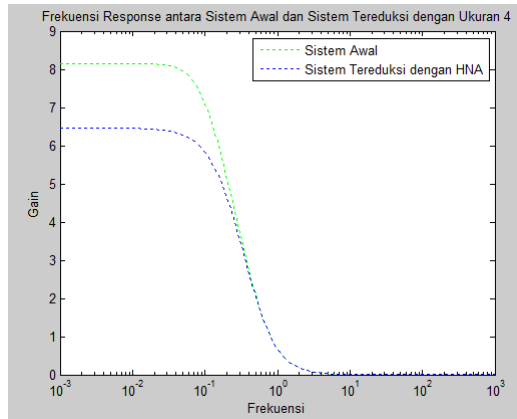
Berdasarkan Tabel 4.23, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks \tilde{A}_{sr} seluruhnya mempunyai nilai kurang dari 1, sehingga berdasarkan **Teorema 2.2.1** sistem tereduksi Orde 4 ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) adalah sistem yang stabil asimtotik.

Kemudian akan dicek mengenai sifat keterkendalian dari sistem tereduksi ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$). Keterkendalian sistem tereduksi orde 4 ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian \tilde{M}_c . Untuk mendapatkan *rank* dari matriks keterkendalian \tilde{M}_c dapat digunakan software MATLAB R2013a, sehingga didapatkan *rank* dari matriks keterkendalian \tilde{M}_c pada sistem tereduksi orde 4 ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) adalah 4. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.2** sistem tereduksi orde 4 ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) adalah terkendali.

Kemudian akan dicek mengenai sifat keteramatan dari sistem tereduksi ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$). Keteramatan sistem tereduksi orde 4 ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan \tilde{M}_o . Untuk mendapatkan *rank* dari matriks keteramatan \tilde{M}_o dapat digunakan software MATLAB R2013a, sehingga didapatkan *rank* dari matriks keteramatan \tilde{M}_o pada sistem tereduksi orde 4 ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) adalah 4. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.3** sistem tereduksi orde 4 ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$)

adalah teramati.

Kemudian berikut ini akan disajikan grafik frekuensi response antara sistem awal dengan sistem tereduksi orde 4 ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) dengan metode HNA seperti yang disajikan pada Gambar 4.8 berikut.



Gambar 4.8: Frekuensi Response antara Sistem Awal dan Sistem Tereduksi Orde 4 dengan HNA

Berdasarkan gambar 4.8, dapat dilihat bahwa ketika frekuensi rendah sistem tereduksi orde 4 ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) dengan HNA mempunyai frekuensi cenderung menjauhi sistem awal (A_s, B_s, C_s, D_s). Sedangkan ketika frekuensi tinggi sistem tereduksi orde 4 ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) dengan HNA cenderung mendekati sistem awal (A_s, B_s, C_s, D_s).

Kemudian disajikan nilai error dari sistem tereduksi orde 4 dalam bentuk Tabel 4.24 sebagai berikut.

Tabel 4.24: Nilai Error dari Sistem Tereduksi Orde 4

Frekuensi	HNA
1	0.00065668
10	0.00034262
100	0.00033930

Dari Tabel 4.24, dapat dilihat bahwa nilai error sistem tereduksi dengan HNA pada frekuensi rendah hingga tinggi memiliki nilai error yang semakin mengecil. Berdasarkan hal tersebut didapatkan tingkat akurasi semakin besar.

4.5 Simulasi Perbandingan Metode Reduksi Model Perbandingan Reduksi model Orde 5 pada Matriks Diagonal

Berikut adalah hasil dari syarat orde Tereduksi dengan BT seperti Tabel 4.25 berikut:

Tabel 4.25: Syarat Orde Tereduksi dengan BT Matriks Diagonal

Orde	$\ G_s - G_{sr}\ _\infty$	$2(\sigma_{r+1} + \dots + \sigma_n)$	$\ G_s - G_{sr}\ _\infty \leq 2(\sigma_{r+1} + \dots + \sigma_n)$	waktu
1	2.287862362	2.678854206024	Memenuhi	0.038919
2	0.224218383	0.272739143203	Memenuhi	0.035781
3	0.018784569	0.023649131730	Memenuhi	0.033861
4	0.001292546	0.001677100921	Memenuhi	0.034328
5	0.000069397	0.000092726892	Memenuhi	0.035744
6	0.000081	0.000003854193	Memenuhi	0.032713
7	0.000000092	0.000000118387	Memenuhi	0.036633
8	0.00000025	0.000000002736	Tidak Memenuhi	0.034068
9	0.00000076	0.000000000042	Tidak Memenuhi	0.028696

Berdasarkan Tabel 4.25 dapat disimpulkan bahwa reduksi model dengan BT ($\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s$) dapat dilakukan ke bentuk orde 3,4,5,6,7,8 dan 9. Kemudian akan dicek sistem tereduksi dengan menggunakan SPA. Berikut adalah hasil dari syarat orde berapa saja yang dapat mereduksi dengan SPA seperti Tabel 4.26 berikut.

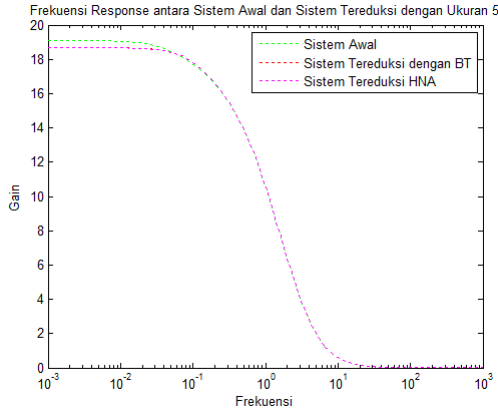
Tabel 4.26: Syarat Orde Tereduksi dengan SPA Matriks Diagonal

Orde	$\ G_s - G_{sr}\ _\infty$	$2(\sigma_{r+1} + \dots + \sigma_n)$	$\ G_s - G_{sr}\ _\infty \leq 2(\sigma_{r+1} + \dots + \sigma_n)$	waktu
1	3.73566589	0.000603992	Tidak Memenuhi	0.050659
2	0.41349137	0.272739143203	Tidak Memenuhi	0.051175
3	0.03797839	0.023649131730	Tidak Memenuhi	0.049653
4	0.00281038	0.001677100921	Tidak Memenuhi	0.050638
5	0.00016352	0.000092726892	Tidak Memenuhi	0.050235
6	0.00000731	0.000003854193	Tidak Memenuhi	0.051978
7	0.00000029	0.000000118387	Tidak Memenuhi	0.051069
8	0.00000036	0.000000002736	Tidak Memenuhi	0.051859
9	0.00000055	0.000000000042	Tidak Memenuhi	0.054513

Berdasarkan Tabel 4.26 dapat disimpulkan bahwa SPA tidak dapat digunakan untuk mereduksi sistem ini.

Kemudian dilakukan perbandingan frekuensi respons antara sistem awal dengan sistem tereduksi dengan metode HNA dan BT.

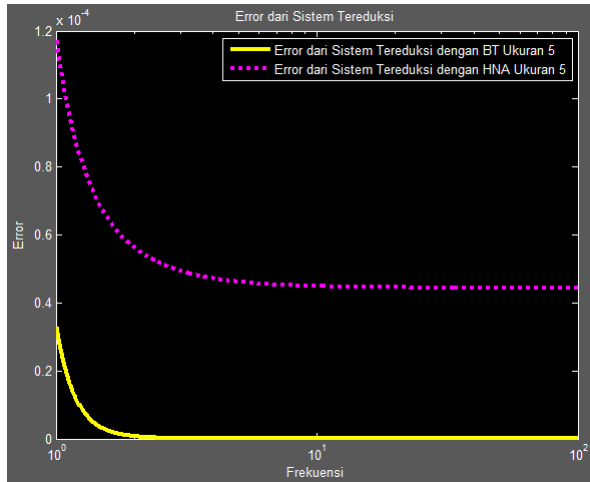
Pada Gambar 4.9, terlihat bahwa sistem tereduksi orde 5 ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) dengan BT ketika frekuensi rendah memiliki frekuensi yang cenderung menjauhi sistem awalnya tetapi frekuensi respon sistem tereduksi orde 5 ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) dengan BT lebih baik daripada frekuensi respon sistem tereduksi orde 5 ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) dengan HNA. Sedangkan pada saat frekuensi tinggi HNA dan BT memiliki frekuensi yang cenderung mendekati sistem awalnya. Namun frekuensi respon sistem tereduksi orde 5 ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) dengan BT lebih baik daripada frekuensi respon sistem tereduksi orde 5 ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) dengan



Gambar 4.9: Frekuensi Response antara Sistem Awal dan Sistem Tereduksi Orde 5 dengan HNA, dan BT

HNA walaupun keduanya sama-sama mendekati sistem awal (A_s, B_s, C_s, D_s).

Kemudian dilakukan perbandingan dari error reduksi model menggunakan HNA dan reduksi model menggunakan BT terhadap sistem awal dapat dilihat melalui grafik yang akan disajikan pada Gambar 4.10 berikut.



Gambar 4.10: Error Sistem Tereduksi Orde 5

Berdasarkan Gambar 4.10, sehingga dapat disajikan nilai error dari sistem tereduksi orde 5 dalam bentuk Tabel 4.27 sebagai berikut.

Tabel 4.27: Error dari Sistem Tereduksi Orde 5

Frekuensi	HNA	BT
1	0.0001171015803	0.0000327350978
10	0.0000448793597	0.0000000038116
100	0.0000444408134	0.0000000002291

Dari Tabel 4.27, dapat dilihat bahwa error sistem tereduksi dengan BT pada frekuensi rendah hingga tinggi memiliki error yang lebih kecil daripada error sistem tereduksi dengan HNA.

Perbandingan Reduksi model Orde 6 pada Matriks Segitiga Atas

Berikut adalah hasil dari syarat orde Tereduksi dengan BT seperti Tabel 4.28 berikut:

Tabel 4.28: Syarat Orde Tereduksi dengan BT Matriks Segitiga Atas

Orde	$\ G_s - G_{sr}\ _\infty$	$2(\sigma_{r+1} + \dots + \sigma_n)$	$\ G_s - G_{sr}\ _\infty \leq 2(\sigma_{r+1} + \dots + \sigma_n)$	waktu
1	355858.47	554879.9957	Memenuhi	0.056542
2	75530.46576	111729.9019	Memenuhi	0.05129
3	10362.43859	15919.25902	Memenuhi	0.042965
4	905.5415994	1529.516572	Memenuhi	0.03853
5	34.60037149	67.50117632	Memenuhi	0.042886
6	1.972454119	2.640495562	Memenuhi	0.03878
7	0.1663318	0.257886273	Memenuhi	0.040665
8	0.000672389	0.001680665	Memenuhi	0.057642
9	0.000347445	0.000603992	Memenuhi	0.036596

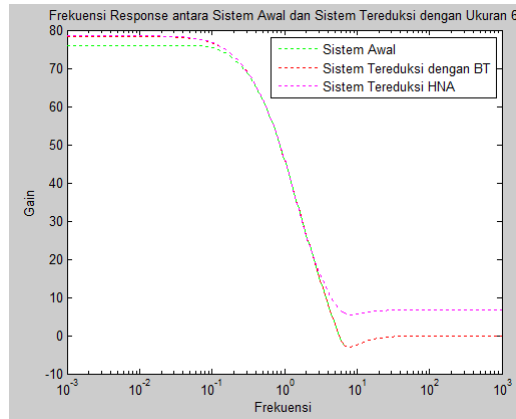
Berdasarkan Tabel 4.28 dapat disimpulkan bahwa reduksi model dengan BT ($\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s$) dapat dilakukan ke bentuk orde 1,2,3,4,5,6,7,8 dan 9. Kemudian dicek sistem tereduksi dengan menggunakan SPA. Berikut adalah hasil dari syarat orde berapa saja yang dapat mereduksi dengan SPA seperti Tabel 4.29 berikut:

Tabel 4.29: Syarat Orde Tereduksi dengan SPA Matriks Segitiga Atas

Orde	$\ G_s - G_{sr}\ _\infty$	$2(\sigma_{r+1} + \dots + \sigma_n)$	$\ G_s - G_{sr}\ _\infty \leq 2(\sigma_{r+1} + \dots + \sigma_n)$	waktu
1	448884.2064	554879.9957	Memenuhi	0.055314
2	117215.951	111729.9019	Tidak Memenuhi	0.058436
3	14650.6973	15919.25902	Memenuhi	0.056775
4	8659.555056	1529.516572	Tidak Memenuhi	0.059717
5	72.88182553	67.50117632	Tidak Memenuhi	0.063447
6	152.9228277	2.640495562	Tidak Memenuhi	0.050013
7	1.638965905	0.257886273	Tidak Memenuhi	0.058972
8	0.004523697	0.001680665	Tidak Memenuhi	0.062718
9	0.014844572	0.000603992	Tidak Memenuhi	0.049906

Berdasarkan Tabel 4.29 dapat disimpulkan bahwa reduksi model dengan SPA ($\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s$) dapat dilakukan ke bentuk orde 1 dan 3.

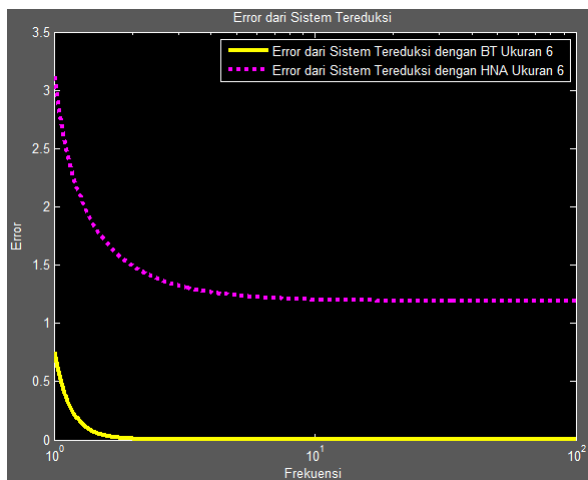
Kemudian dilakukan perbandingan frekuensi respons antara sistem awal dengan sistem tereduksi dengan metode HNA dan BT.



Gambar 4.11: Frekuensi Response antara Sistem Awal dan Sistem Tereduksi Orde 6 dengan HNA dan BT

Pada Gambar 4.11, terlihat bahwa sistem tereduksi orde 6 ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) dengan HNA maupun BT ketika frekuensi rendah dan tinggi memiliki frekuensi yang cenderung mendekati sistem awalnya (A_s, B_s, C_s, D_s). Namun sistem tereduksi orde 6 ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) dengan BT lebih mendekati sistem awal daripada dengan HNA.

Kemudian dilakukan perbandingan dari error reduksi model menggunakan HNA dan reduksi model menggunakan BT terhadap sistem awal dapat dilihat melalui grafik yang disajikan pada Gambar 4.12 berikut.



Gambar 4.12: Error Sistem Tereduksi Orde 6

Berdasarkan Gambar 4.12, sehingga dapat disajikan nilai error dari sistem tereduksi orde 6 dalam bentuk Tabel 4.30 sebagai berikut.

Tabel 4.30: Error dari Sistem Tereduksi Orde 6

Frekuensi	HNA	BT
1	3.1152879112	0.7514662694
10	1.2030947498	0.0000293207
100	1.1914244025	0.0000016969

Dari Tabel 4.20, dapat dilihat bahwa error sistem tereduksi dengan BT pada frekuensi rendah hingga tinggi memiliki error yang lebih kecil daripada error sistem tereduksi dengan HNA.

Perbandingan Reduksi model Orde 7 pada Matriks Segitiga Bawah

Berikut adalah hasil dari syarat orde tereduksi dengan BT seperti Tabel 4.31 berikut:

Tabel 4.31: Syarat Orde Tereduksi dengan BT Matriks Segitiga Bawah

Orde	$\ G_s - G_{sr}\ _\infty$	$2(\sigma_{r+1} + \dots + \sigma_n)$	$\ G_s - G_{sr}\ _\infty \leq 2(\sigma_{r+1} + \dots + \sigma_n)$	waktu
1	19189.6704	35278.0809	Memenuhi	0.02692
2	5538.561372	9517.437101	Memenuhi	0.036468
3	870.3753792	1931.143655	Memenuhi	0.031757
4	492.8857452	624.8467986	Memenuhi	0.033446
5	81.61404363	124.6790779	Memenuhi	0.034151
6	0.436406763	0.491553783	Memenuhi	0.03438
7	0.003076589	0.006395132	Memenuhi	0.03421
8	0.000468394	0.000676103	Memenuhi	0.040797
9	0.0000238623	0.00000018	Memenuhi	0.027169

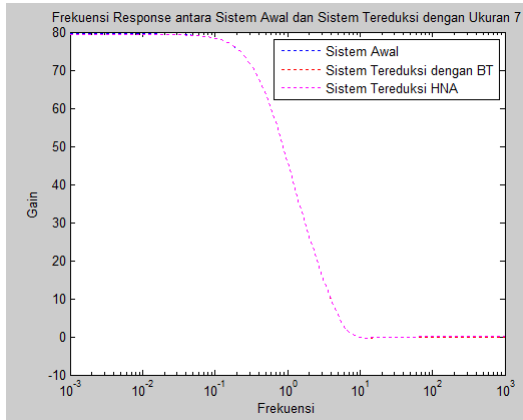
Berdasarkan Tabel 4.31 dapat disimpulkan bahwa reduksi model dengan BT ($\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s$) dapat dilakukan ke bentuk orde 1,2,3,4,5,6,7,8 dan 9. Kemudian dicek sistem tereduksi dengan menggunakan SPA. Berikut adalah hasil dari syarat orde berapa saja yang dapat mereduksi dengan SPA seperti Tabel 4.32 berikut:

Tabel 4.32: Syarat Orde Tereduksi dengan SPA Matriks Segitiga Bawah

Orde	$\ G_s - G_{sr}\ _\infty$	$2(\sigma_{r+1} + \dots + \sigma_n)$	$\ G_s - G_{sr}\ _\infty \leq 2(\sigma_{r+1} + \dots + \sigma_n)$	waktu
1	17386.54351	35278.0809	Memenuhi	0.039948
2	186039.5441	9517.437101	Tidak Memenuhi	0.055546
3	2369.687388	1931.143655	Tidak Memenuhi	0.03955
4	1548.168199	624.8467986	Tidak Memenuhi	0.044213
5	2201.616354	124.6790779	Tidak Memenuhi	0.051482
6	0.643002649	0.491553783	Tidak Memenuhi	0.05341
7	0.054613367	0.006395132	Tidak Memenuhi	0.042391
8	0.001218216	0.000676103	Tidak Memenuhi	0.055213
9	0.000006747	0.00000018	Tidak Memenuhi	0.044271

Berdasarkan Tabel 4.32 dapat disimpulkan bahwa reduksi model dengan SPA ($\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s$) dapat dilakukan ke dalam bentuk orde 1.

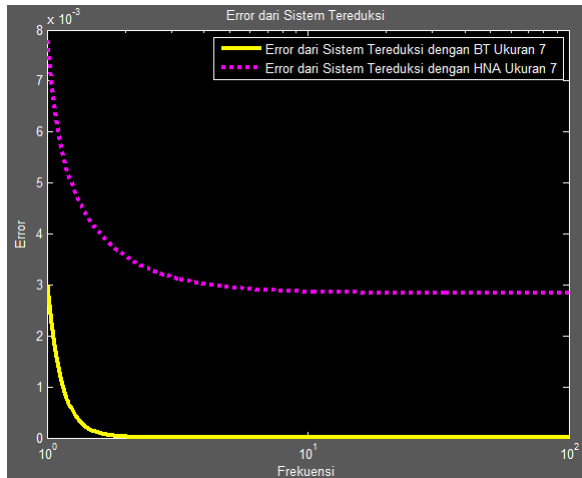
Kemudian dilakukan perbandingan frekuensi respons antara sistem awal dengan sistem tereduksi dengan metode HNA dan BT.



Gambar 4.13: Frekuensi Response antara Sistem Awal dan Sistem Tereduksi Orde 7 dengan HNA dan BT

Pada Gambar 4.13, terlihat bahwa sistem tereduksi orde 7 ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) dengan HNA maupun BT ketika frekuensi rendah hingga frekuensi tinggi memiliki frekuensi yang cenderung mendekati dengan sistem awalnya.

Kemudian dilakukan perbandingan dari error reduksi model menggunakan HNA dan reduksi model menggunakan BT terhadap sistem awal dapat dilihat melalui grafik yang disajikan pada Gambar 4.14 berikut.



Gambar 4.14: Error Sistem Tereduksi Orde 7

Berdasarkan Gambar 4.14, sehingga dapat disajikan nilai error dari sistem tereduksi orde 7 dalam bentuk Tabel 4.33 sebagai berikut.

Tabel 4.33: Error dari Sistem Tereduksi Orde 7

Frekuensi	HNA	BT
1	0.0077849613	0.0030044792
10	0.0028669718	0.0000001275
100	0.0028390930	0.0000000101

Dari Tabel 4.33, dapat dilihat bahwa error sistem tereduksi dengan BT pada frekuensi rendah hingga tinggi memiliki error yang lebih kecil daripada error sistem tereduksi dengan HNA.

Perbandingan Reduksi model Orde 4 pada Matriks Tridiagonal

Berikut adalah hasil dari syarat orde tereduksi dengan BT seperti Tabel 4.34 berikut:

Tabel 4.34: Syarat Orde Tereduksi dengan BT Matriks Tridiagonal

Orde	$\ G_s - G_{sr}\ _\infty$	$2(\sigma_{r+1} + \dots + \sigma_n)$	$\ G_s - G_{sr}\ _\infty \leq 2(\sigma_{r+1} + \dots + \sigma_n)$	waktu
1	0.4116856909	0.50527396	Memenuhi	0.051295
2	0.0292023484	0.04432170	Memenuhi	0.038245
3	0.0037849505	0.00585357	Memenuhi	0.04002
4	0.0005049555	0.00078234	Memenuhi	0.026353
5	0.0000667051	0.00010381	Memenuhi	0.032449
6	0.0000084261	0.00001335	Memenuhi	0.023894
7	0.0000009285	0.00000155	Memenuhi	0.024368
8	0.0000000824	0.00000014	Memenuhi	0.025163
9	0.0000000053	0.00000001	Memenuhi	0.02776

Berdasarkan Tabel 4.34 dapat disimpulkan bahwa reduksi model dengan BT ($\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s$) dapat dilakukan ke dalam bentuk orde 1,2,3,4,5,6,7,8 dan 9. Kemudian dicek sistem tereduksi dengan menggunakan SPA. Berikut adalah hasil dari syarat orde berapa saja yang dapat mereduksi dengan SPA seperti Tabel 4.35 berikut:

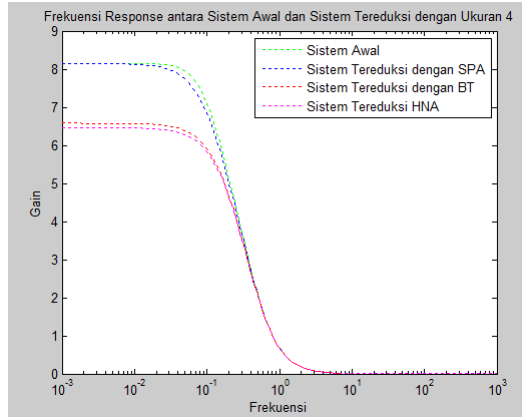
Tabel 4.35: Syarat Orde Tereduksi dengan SPA Matriks Tridiagonal

Orde	$\ G_s - G_{sr}\ _\infty$	$2(\sigma_{r+1} + \dots + \sigma_n)$	$\ G_s - G_{sr}\ _\infty \leq 2(\sigma_{r+1} + \dots + \sigma_n)$	waktu
1	0.5395485863	0.50527396	Tidak Memenuhi	0.058552
2	0.0440131994	0.04432170	Memenuhi	0.056866
3	0.6547281583	0.00585357	Tidak Memenuhi	0.055988
4	0.0005024370	0.00078234	Memenuhi	0.039592
5	0.0005673070	0.00010381	Tidak Memenuhi	0.051858
6	0.0000152605	0.00001335	Tidak Memenuhi	0.040226
7	0.0000034502	0.00000155	Tidak Memenuhi	0.041654
8	0.0000004902	0.00000014	Tidak Memenuhi	0.037981
9	0.0000000236	0.00000001	Tidak Memenuhi	0.040303

Berdasarkan Tabel 4.35 dapat disimpulkan bahwa reduksi model dengan SPA ($\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s$) dapat dilakukan ke bentuk

orde 2 dan 4.

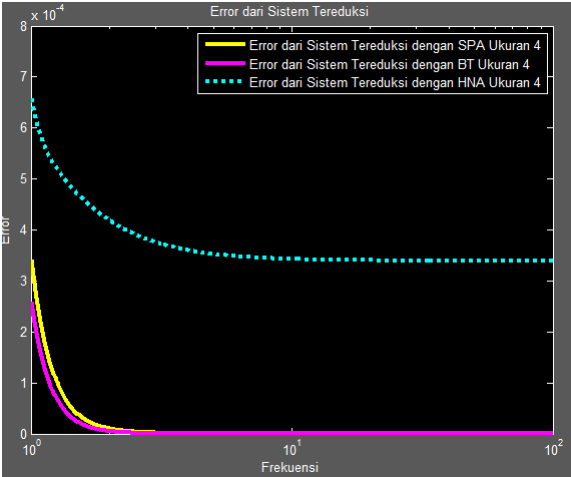
Kemudian dilakukan perbandingan frekuensi respons antara sistem awal dengan sistem tereduksi dengan metode HNA, SPA dan BT.



Gambar 4.15: Frekuensi Response antara Sistem Awal dan Sistem Tereduksi Orde 4 dengan HNA, SPA dan BT

Pada Gambar 4.15, terlihat bahwa sistem tereduksi orde 4 ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) dengan HNA dan BT ketika frekuensi rendah memiliki frekuensi yang cenderung menjauhi sistem awalnya. Namun sistem tereduksi orde 4 ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) dengan SPA ketika frekuensi rendah memiliki frekuensi yang cenderung mendekati sistem awalnya. Sedangkan pada saat frekuensi tinggi sistem tereduksi dengan menggunakan HNA, BT, dan SPA ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) orde 4 mempunyai frekuensi respon yang mendekati sistem awal (A_s, B_s, C_s, D_s).

Kemudian dilakukan perbandingan dari error reduksi model menggunakan HNA dan reduksi model menggunakan BT terhadap sistem awal dapat dilihat melalui grafik yang disajikan pada Gambar 4.16 berikut.



Gambar 4.16: Error Sistem Tereduksi Orde 4

Berdasarkan Gambar 4.16, sehingga dapat disajikan nilai error dari sistem tereduksi orde 4 dalam bentuk Tabel 4.36 sebagai berikut.

Tabel 4.36: Error dari Sistem Tereduksi Orde 4

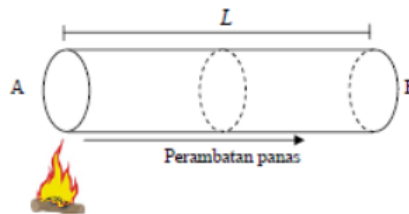
Frekuensi	HNA	BT	SPA
1	0.00065668	0.0002575964	0.00034182
10	0.00034262	0.0000000166	0.00000012
100	0.00033930	0.0000000009	0.00000006

Dari Tabel 4.36, dapat dilihat bahwa error sistem tereduksi dengan BT dan SPA pada frekuensi rendah hingga tinggi memiliki error yang lebih kecil daripada error sistem tereduksi dengan HNA.

4.6 Sistem Konduksi Panas

Konduksi panas adalah aliran panas yang tidak diikuti oleh pergeseran media perantaranya dimana panas mengalir dari suhu yang lebih tinggi menuju ke suhu yang lebih rendah. Berlangsungnya konduksi panas melalui zat dapat diketahui oleh perubahan temperatur yang terjadi. Untuk mendapatkan suatu sistem konduksi panas yang berbentuk diskrit, maka dilakukan pendiskritan terlebih dahulu. Hal ini dikarenakan model persamaan konduksi panas masih merupakan sistem yang kontinu. Kemudian langkah selanjutnya dilakukan reduksi model yang telah dibentuk dari pendiskritan tersebut.

4.6.1 Diskritisasi Model Konduksi Panas pada Batang Logam



Gambar 4.17: Perambatan Panas Pada Batang

Model sistem konduksi panas pada sistem kontinu dapat dinyatakan sebagai berikut [9]:

$$U_t = \alpha U_{xx}, (0 < x < L, t > 0)$$

U_t adalah perubahan panas yang mengalir pada kawat terhadap waktu dan U_{xx} adalah perubahan panas yang mengalir pada kawat terhadap posisi sepanjang kawat dengan T adalah waktu hitungan total. Hal ini berarti bahwa persamaan konduksi panas tersebut mempunyai syarat awal dan syarat batas sebagai berikut[10]:

$$\begin{aligned}
U(x, 0) &= 0; 0 < x < L \\
U(0, t) &= \bar{U}; 0 < t \leq T \\
U(l, t) &= 0; 0 < t \leq T
\end{aligned}$$

Kemudian dilakukan pendiskritan pada model konduksi panas. Pendiskritan pada persamaan konduksi panas digunakan metode beda hingga maju untuk pendiskritan U_t dan metode beda hingga pusat untuk pendiskritan U_{xx} sehingga didapatkan:

$$\begin{aligned}
U_t &= \alpha U_{xx} \\
\frac{\partial U}{\partial t} &= \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}
\end{aligned}$$

kemudian dengan metode beda hingga didapatkan,

$$\begin{aligned}
\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t} &= \alpha \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{(\Delta x)^2} \\
u_i^{k+1} - u_i^k &= \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} (u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k)
\end{aligned}$$

misalkan $\gamma = \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2}$, sehingga didapatkan,

$$\begin{aligned}
u_i^{k+1} - u_i^k &= \gamma (u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k) \\
u_i^{k+1} &= \gamma (u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k) + u_i^k \\
u_i^{k+1} &= \gamma u_{i+1}^k - 2\gamma u_i^k + \gamma u_{i-1}^k + u_i^k \\
u_i^{k+1} &= \gamma u_{i+1}^k + (1 - 2\gamma)u_i^k + \gamma u_{i-1}^k \quad (4.6.1)
\end{aligned}$$

dengan $i = 1, 2, \dots, s$. Kemudian dimasukkan nilai i dimasukkan ke dalam persamaan (4.6.1) sehingga didapatkan untuk $i = 1$, didapatkan :

$$u_1^{k+1} = \gamma u_2^k + (1 - 2\gamma)u_1^k + \gamma u_0^k$$

untuk $i = 2$, didapatkan :

$$\begin{aligned}
u_2^{k+1} &= \gamma u_3^k + (1 - 2\gamma)u_2^k + \gamma u_1^k \\
&\vdots
\end{aligned}$$

untuk $i = n$, didapatkan :

$$u_n^{k+1} = \gamma u_{n+1}^k + (1 - 2\gamma)u_n^k + \gamma u_{n-1}^k \quad (4.6.2)$$

Selanjutnya dengan memilih $x_k = (u_1^k, u_2^k, \dots, u_s^k)$ sebagai vektor keadaan, sistem yang berbentuk persamaan beda hingga pada persamaan(4.6.2) dapat ditulis ke dalam bentuk sistem ruang keadan yang invarian terhadap waktu sebagai berikut.

$$x_k = \begin{pmatrix} u_1^k \\ u_2^k \\ \vdots \\ u_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma u_2^k + (1 - 2\gamma)u_1^k + \gamma u_0^k \\ u_2^{k+1} = \gamma u_3^k + (1 - 2\gamma)u_2^k + \gamma u_1^k \\ \vdots \\ \gamma u_{n+1}^k + (1 - 2\gamma)u_n^k + \gamma u_{n-1}^k \end{pmatrix} \quad (4.6.3)$$

Kemudian persamaan (4.6.3) dibawah ke dalam bentuk sistem diskrit $x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$ sehingga didapatkan

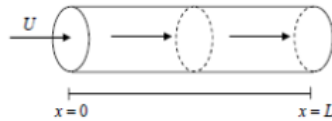
$$x_{k+1} = \begin{pmatrix} 1 - 2\gamma & \gamma & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \gamma & 1 - 2\gamma & \gamma & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma & 1 - 2\gamma & \gamma & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma & 1 - 2\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}^k +$$

$$\begin{pmatrix} \gamma u_0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \gamma u_{n+1} \end{pmatrix} \quad (4.6.4)$$

dengan,

$$x_{k+1} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}^{k+1}$$

n menunjukkan ukuran matriks keadaan dan dapat dinyatakan $n = f - 1$. Nilai f sendiri menyatakan jumlah grid yang ingin dibuat pada sistem konduksi panas.



Gambar 4.18: Isolasi Batang Secara Sempurna

Syarat kondisi batas yang diberikan adalah yaitu $U(0, t) = U_0 = \bar{U}$ untuk ujung logam sebelah kiri dan $U(L, t) = 0 = U_{s+1}$ untuk ujung logam sebelah kanan(kondisi isolasi

sempurna). Sehingga sistem sistem diskrit $x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$ didapatkan,

$$x_{k+1} = \begin{pmatrix} 1-2\gamma & \gamma & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \gamma & 1-2\gamma & \gamma & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma & 1-2\gamma & \gamma & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma & 1-2\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}^k + \begin{pmatrix} \gamma u_0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.6.5)$$

dengan,

$$Bu_k = \begin{pmatrix} \gamma u_0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; u_k = u_0$$

Sistem awal dari model konduksi panas ini menghasilkan matriks A yang berbentuk tridiagonal. Hal ini merupakan

salah satu pengaplikasian dari yang sudah dikaji mengenai beberapa matriks A yang berbeda.

4.6.2 Sistem Awal Sistem Konduksi Panas

Sistem awal konduksi panas ini dibentuk grid(f) sebanyak 11 sehingga didapatkan sistem awal yang mempunyai orde 10. Kemudian diambil nilai parameter $\gamma = 0.4$, sehingga didapatkan matriks (A, B, C, D) sebagai berikut :

Sistem Awal

$$A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.2 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.2 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.2 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.2 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.2 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.2 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$$

$$D = (1)$$

Selanjutnya diselidiki sifat dari sistem (A, B, C, D) yang berupa sifat kestabilan, keterkendalian, dan keteramatan.

Kestabilan dari sistem awal (A, B, C, D) dapat ditentukan berdasarkan nilai $|\lambda|$ dari eigen matriks A seperti yang disajikan pada Tabel 4.37 berikut.

Tabel 4.37: Nilai Eigen dari Sistem Awal (A, B, C, D)

i	$ \sigma_i $
1	0.567594378891598
2	0.473002826264945
3	0.323888587156228
4	0.132332010401509
5	0.086148129381372
6	0.313851870618629
7	0.532332010401509
8	0.723888587156228
9	0.873002826264945
10	0.967594378891598

Berdasarkan Tabel 4.37, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks A bernilai kurang dari 1, sehingga berdasarkan **Teorema 2.2.1** sistem awal (A, B, C, D) adalah sistem yang stabil asimtotik.

Keterkendalian sistem awal (A, B, C, D) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian M_c . Dengan menggunakan software MATLAB R2013a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian M_c pada sistem awal (A, B, C, D) adalah 10. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.2** sistem awal (A, B, C, D) adalah terkendali.

Keteramatan sistem awal (A, B, C, D) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan M_o . Dengan menggunakan software MATLAB R2013a, dapat diketahui

bahwa *rank* dari matriks keteramatan M_o pada sistem awal (A, B, C, D) adalah 10. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.3** sistem awal (A, B, C, D) adalah teramati.

Karena sistem awal yang dibangun adalah sistem yang stabil asimtotik, terkendali dan teramati sehingga berdasarkan **Teorema 2.2.4**, didapatkan gramian keterkendalian W dan gramian keteramatan M . Selanjutnya dibentuk suatu sistem setimbang.

Sistem Setimbang

Selanjutnya adalah membentuk sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dari sistem stabil digunakan software MATLAB R2013a, didapatkan sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ sebagai berikut:

$$\tilde{A}_g = \begin{pmatrix} 0.37906 & 0.3844 & -0.1545 & 0.027 & 0.0033 & -0.0018 & 0.0001 & 0.00003 & -0.000001 & 0.0000002 \\ 0.3844 & 0.5012 & 0.3741 & -0.1388 & 0.0148 & 0.0036 & -0.000024 & -0.000003 & -0.000009 & -0.000001 \\ -0.1545 & 0.3741 & 0.4674 & 0.3807 & -0.1010 & 0.0022 & -0.00018 & 0.00003 & -0.000003 & -0.0000002 \\ 0.0270 & -0.1388 & -0.3807 & 0.3798 & 0.3847 & -0.0677 & -0.0034 & -0.0014 & 0.00003 & 0.000007 \\ 0.0033 & 0.0148 & -0.1010 & 0.3847 & 0.2932 & 0.3769 & -0.0047 & -0.0047 & 0.00047 & -0.000037 \\ -0.0018 & 0.0036 & 0.0022 & -0.0677 & 0.3769 & 0.2079 & 0.3584 & 0.1182 & 0.32879 & -0.0073 \\ 0.0001 & -0.0008 & 0.0027 & -0.0034 & -0.0402 & 0.3584 & 0.1182 & 0.32879 & -0.0021 & -0.2188 \\ 0.00003 & -0.000024 & -0.00018 & 0.0014 & -0.0047 & -0.0183 & 0.3287 & 0.18 & 0.2851 & -0.1026 \\ -0.000001 & 0.000009 & -0.00003 & 0.00003 & 0.00047 & -0.0037 & -0.0021 & 0.2851 & -0.1026 & -0.2188 \\ 0.0000002 & -0.0000003 & -0.0000002 & 0.000007 & -0.000037 & -0.000001 & 0.0017 & -0.0073 & -0.2188 & -0.26236 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}_g = \begin{pmatrix} -0.61492 & 0.14647 & -0.01881 & -0.006973 & 0.00333 & -0.00029 & -0.000066 & 0.0000006 & 0.00000003 \\ 0.14647 & -0.01881 & -0.006973 & 0.003337 & -0.00029 & -0.00006 & 0.000009 & 0.0000006 & 0.00000003 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C}_g = (-0.61492 \quad 0.14647 \quad -0.01881 \quad -0.00697 \quad 0.00333 \quad -0.00029 \quad -0.000066 \quad 0.0000009 \quad 0.00000006 \quad 0.00000003)$$

$$\tilde{D}_g = (1)$$

Selanjutnya dicari gramian keterkendalian \tilde{W} dan gramian keteramatan \tilde{M} dari sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$, sehingga diperoleh:

$$\tilde{W} = \begin{pmatrix} 0.46479 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.12803 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.03956 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.01043 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.002241 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.000394 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.00005 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.000006 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0000005 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.00000002 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} 0.46479 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.12803 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.03956 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.01043 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.002241 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.000394 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.00005 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.000006 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0000005 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.00000002 \end{pmatrix}$$

Dapat dilihat bahwa nilai dari $\tilde{W} = \tilde{M}$ yang sama artinya dengan $\tilde{W} = \tilde{M} = \Sigma$, dengan $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$, dengan σ adalah nilai singular Hankel, maka didapatkan nilai singular Hankel seperti yang disajikan pada Tabel 4.38 berikut.

Tabel 4.38: Nilai Singular Hankel

i	$ \sigma_i $
1	0.46479
2	0.12803
3	0.03956
4	0.01043
5	0.00224
6	0.00039
7	0.00005
8	0.000006
9	0.0000005
10	0.00000002

Berdasarkan Tabel 4.38, terlihat bahwa semua nilai singular Hankel adalah positif dan determinan dari nilai singular Hankel tidak sama dengan 0.

Selanjutnya diselidiki sifat dari sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ yang berupa sifat kestabilan, keterkendalian, dan keteramatan.

Kestabilan dari sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dapat ditentukan berdasarkan nilai $|\lambda|$ dari eigen matriks \tilde{A}_s seperti yang disajikan pada Tabel berikut.

Tabel 4.39: Nilai Eigen dari Sistem Setimbang

i	$ \lambda_i $
1	0.967594
2	0.873002
3	0.723888
4	0.532332
5	0.313851
6	0.086148
7	0.567594
8	0.473002
9	0.132332
10	0.323888

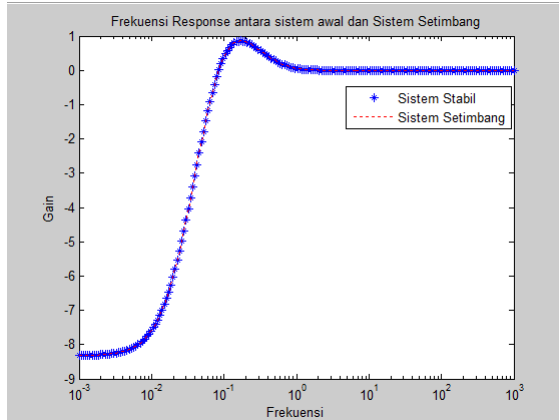
Berdasarkan Tabel 4.39, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks \tilde{A}_s seluruhnya mempunyai nilai kurang dari 1, sehingga berdasarkan **Teorema 2.2.1** sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ merupakan sistem yang stabil asimtotik.

Kemudian keterkendalian sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian \tilde{M}_c . Dengan menggunakan software MATLAB R2013a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keterkendalian \tilde{M}_c pada sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ adalah 10. Sehingga berdasarkan **Teorema 2.2.2** sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ adalah sistem yang terkendali.

Keteramatan sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan \tilde{M}_o . Dengan menggunakan software MATLAB R2013a, dapat diketahui bahwa *rank* dari matriks keteramatan \tilde{M}_o pada sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ adalah 10. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.3** sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ adalah sistem yang teramati. Dengan demikian sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ merupakan

sistem yang stabil asimtotik, terkendali dan teramat.

Kemudian ditunjukkan frekuensi respon antara sistem stabil (A_s, B_s, C_s, D_s) dengan sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ yang disajikan pada Gambar 4.19 sebagai berikut.



Gambar 4.19: Frekuensi Respon antara Sistem Stabil (A_s, B_s, C_s, D_s) dan Sistem Setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$

Berdasarkan pada Gambar 4.19 dapat dilihat bahwa frekuensi respon antara Sistem Stabil (A_s, B_s, C_s, D_s) dan Sistem Setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ memiliki kesamaan, baik dalam frekuensi rendah maupun frekuensi tinggi.

Sebelum sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ direduksi dengan menggunakan metode HNA, maka di cek kembali syarat dimana reduksi pada sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ dapat dilakukan. Berikut ini didapatkan hasil dari syarat orde berapa saja yang dapat dilakukan reduksi dengan HNA dan disajikan pada Tabel 4.40 berikut.

Tabel 4.40: Syarat Orde Tereduksi dengan HNA Sistem Konduksi Panas

Orde	$\ G_s - G_{sr}\ _\infty$	σ_{r+1}	$\ G_s - G_{sr}\ _\infty \geq \sigma_{r+1}$	waktu
1	0.38244356	0.128039	Memenuhi	0.096946
2	0.350568	0.039566	Memenuhi	0.041492
3	0.200753	0.010430	Memenuhi	0.042267
4	0.013513	0.002241	Memenuhi	0.04414
5	0.001943	0.0003942	Memenuhi	0.044436
6	0.000276	0.000056	Memenuhi	0.044888
7	0.000031	0.000006	Memenuhi	0.033939
8	0.000002	0.00000052	Memenuhi	0.043
9	0.00000014	0.00000002	Memenuhi	0.100721

Berdasarkan Tabel 4.40 dapat disimpulkan bahwa reduksi model dengan HNA ($\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s$) dapat dilakukan ke bentuk orde 1,2,3,4,5,6,7,8 dan 9. Kemudian dicek sistem tereduksi dengan menggunakan BT. Berikut adalah hasil dari syarat orde berapa saja yang dapat mereduksi dengan BT seperti Tabel 4.41 berikut:

Tabel 4.41: Syarat Orde Tereduksi dengan BT Sistem Konduksi Panas

Orde	$\ G_s - G_{sr}\ _\infty$	$2(\sigma_{r+1} + \dots + \sigma_n)$	$\ G_s - G_{sr}\ _\infty \leq 2(\sigma_{r+1} + \dots + \sigma_n)$	waktu
1	0.300115	0.361471	Memenuhi	0.030575
2	0.089794	0.105392	Memenuhi	0.033215
3	0.021675	0.026259	Memenuhi	0.035793
4	0.004176	0.005398	Memenuhi	0.033762
5	0.000651	0.000914	Memenuhi	0.03297
6	0.000081	0.000126	Memenuhi	0.035498
7	0.0000078	0.000013	Memenuhi	0.033939
8	0.00000066	0.0000011	Memenuhi	0.032861
9	0.000000036	0.000000055	Memenuhi	0.053702

Berdasarkan Tabel 4.41 dapat disimpulkan bahwa reduksi model dengan BT ($\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s$) dapat dilakukan ke dalam bentuk orde 1,2,3,4,5,6,7,8 dan 9. Kemudian dicek sistem tereduksi dengan menggunakan SPA. Berikut adalah hasil dari syarat orde berapa saja yang dapat mereduksi dengan SPA seperti Tabel 4.42 berikut:

Tabel 4.42: Syarat Orde Tereduksi dengan SPA Sistem Konduksi Panas

Orde	$\ G_s - G_{sr}\ _\infty$	$2(\sigma_{r+1} + \dots + \sigma_n)$	$\ G_s - G_{sr}\ _\infty \leq 2(\sigma_{r+1} + \dots + \sigma_n)$	waktu
1	0.164150	0.361471	Memenuhi	0.048844
2	0.165174	0.105392	Tidak Memenuhi	0.052091
3	0.100691	0.026259	Tidak Memenuhi	0.049423
4	0.004120	0.005398	Memenuhi	0.048908
5	0.015991	0.000914	Tidak Memenuhi	0.052346
6	0.000511	0.000126	Tidak Memenuhi	0.053664
7	0.0000118	0.000013	Memenuhi	0.049673
8	0.00003863	0.0000011	Tidak Memenuhi	0.053873
9	0.00000011	0.000000055	Tidak Memenuhi	0.053036

Berdasarkan Tabel 4.42 dapat disimpulkan bahwa reduksi model dengan SPA ($\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s$) dapat dilakukan ke bentuk orde 4 dan orde 7.

Kemudian dalam tugas akhir ini dibahas simulasi dengan orde 4, dan 7 sebagai berikut.

Reduksi HNA Orde 4

Setelah didapatkan sistem setimbang ($\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s$), kemudian dilakukan reduksi model dengan metode HNA. Sistem setimbang ($\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s$) tersebut yang mempunyai orde 10 dapat dibentuk menjadi sistem tereduksi ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) yang mempunyai orde 4. Berikut ini merupakan sistem tereduksi ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$),

$$\tilde{A}_{sr} = \begin{pmatrix} 0.3830 & 0.1049 & -0.01304 & 0.0006 \\ 1.38364 & 0.5044 & 0.1154 & -0.0115 \\ -1.8056 & 1.2119 & 0.4709 & 0.1021 \\ 1.3571 & -1.8154 & 1.5355 & 0.4176 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}_{sr} = \begin{pmatrix} -1.3166 \\ 1.1242 \\ -0.4501 \\ -0.5502 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C}_{sr} = \begin{pmatrix} -0.2844 & 0.0184 & -0.00070 & -0.00005 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{D}_{sr} = (1.0022)$$

Kemudian dicek sifat-sifat sistemnya yang meliputi kestabilan, keterkendalian, dan keteramatan. Kestabilan dari sistem tereduksi orde 4 ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) dapat ditentukan berdasarkan nilai λ dari sistem tereduksi ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) seperti yang disajikan pada Tabel 4.43 berikut.

Tabel 4.43: Nilai Eigen dari Sistem Tereduksi Orde 4

i	$ \lambda_i $
1	0.3108
2	0.3229
3	0.7950
4	0.9688

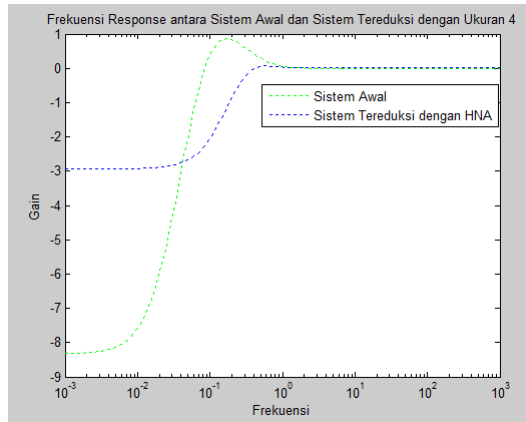
Berdasarkan Tabel 4.43, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks \tilde{A}_{sr} seluruhnya mempunyai nilai kurang dari 1, sehingga berdasarkan **Teorema 2.2.1** sistem tereduksi Orde 4 ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) adalah sistem yang stabil asimtotik.

Kemudian dicek mengenai sifat keterkendalian dari sistem tereduksi ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$). Keterkendalian sistem tereduksi orde 4 ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian \tilde{M}_c . Untuk mendapatkan *rank* dari matriks keterkendalian \tilde{M}_c dapat digunakan software MATLAB R2013a, sehingga didapatkan *rank* dari matriks keterkendalian \tilde{M}_c pada sistem tereduksi orde 4 ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) adalah 4. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.2** sistem tereduksi orde 4 ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) adalah terkendali.

Kemudian dicek mengenai sifat keteramatan dari sistem tereduksi ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$). Keteramatan sistem tereduksi orde 4 ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan \tilde{M}_o . Untuk mendapatkan *rank* dari

matriks keteramatan \tilde{M}_o dapat digunakan software MATLAB R2013a, sehingga didapatkan *rank* dari matriks keteramatan \tilde{M}_o pada sistem tereduksi orde 4 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ adalah 4. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.3** sistem tereduksi orde 4 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ adalah teramati.

Kemudian berikut ini disajikan grafik frekuensi response antara sistem awal dengan sistem tereduksi orde 4 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ dengan HNA seperti yang disajikan pada Gambar 4.20 berikut.

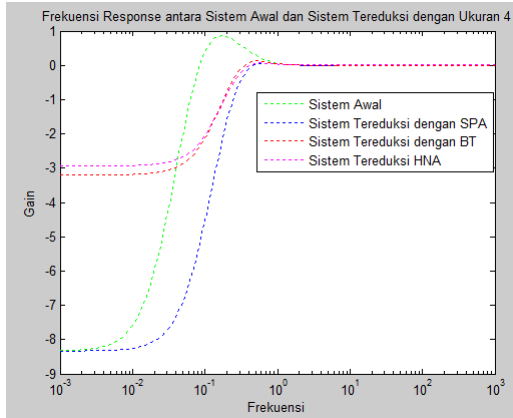


Gambar 4.20: Frekuensi Response antara Sistem Awal dan Sistem Tereduksi Orde 4 dengan HNA

Berdasarkan gambar 4.20, dapat dilihat bahwa ketika frekuensi rendah sistem tereduksi orde 4 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ dengan HNA mempunyai frekuensi cenderung menjauhi sistem awal (A_s, B_s, C_s, D_s) . Sedangkan ketika frekuensi tinggi sistem tereduksi orde 4 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ dengan HNA cenderung mendekati sistem awal (A_s, B_s, C_s, D_s) .

Kemudian dilakukan perbandingan frekuensi respons antara sistem awal dengan sistem tereduksi dengan metode

HNA, SPA dan BT.

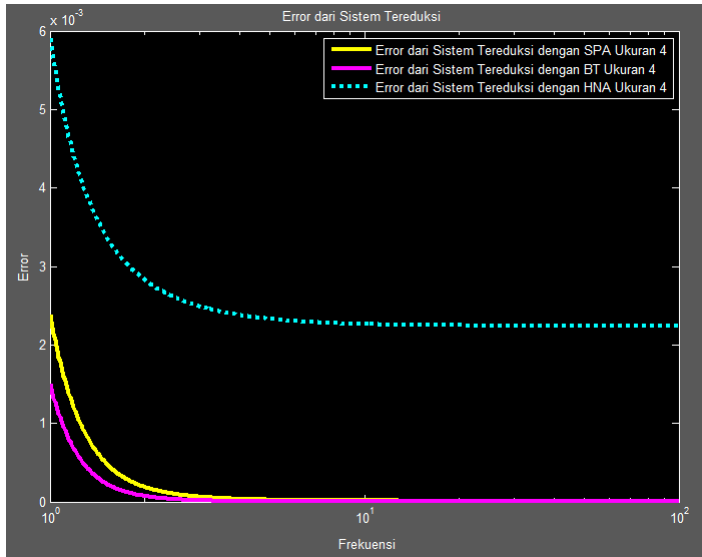


Gambar 4.21: Frekuensi Response antara Sistem Awal dan Sistem Tereduksi Orde 4 dengan HNA, BT, dan SPA

Pada Gambar 4.21, terlihat bahwa sistem tereduksi orde 4 ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) dengan HNA dan BT ketika frekuensi rendah memiliki frekuensi yang cenderung menjauhi sistem awalnya. Namun sistem tereduksi orde 4 ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) dengan SPA ketika frekuensi rendah memiliki frekuensi yang cenderung mendekati sistem awalnya. Sedangkan pada saat frekuensi tinggi sistem tereduksi dengan menggunakan HNA, BT, dan SPA ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) orde 4 mempunyai frekuensi respon yang mendekati sistem awal (A_s, B_s, C_s, D_s).

Error dari Sistem Tereduksi Orde 4

Perbandingan dari error reduksi model menggunakan HNA dan reduksi model menggunakan BT dan SPA terhadap sistem awal dapat dilihat melalui grafik yang disajikan pada Gambar 4.22 berikut.



Gambar 4.22: Error Sistem Tereduksi Orde 4

Berdasarkan Gambar 4.22, sehingga dapat disajikan nilai error dari sistem tereduksi orde 4 dalam bentuk Tabel 4.44 sebagai berikut.

Tabel 4.44: Error dari Sistem Tereduksi Orde 4

Frekuensi	SPA	BT	HNA
1	0.00237902	0.001497	0.00590
10	0.00001399	0.00000135	0.00226
100	0.000011	0.000000112	0.00224

Dari Tabel 4.44, dapat dilihat bahwa error sistem tereduksi dengan SPA dan BT pada frekuensi rendah hingga

tinggi memiliki error yang lebih kecil daripada error sistem tereduksi dengan HNA.

Reduksi HNA Orde 7

Setelah didapatkan sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$, kemudian dilakukan reduksi model dengan metode HNA. Sistem setimbang $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s, \tilde{C}_s, \tilde{D}_s)$ tersebut yang mempunyai orde 10 dapat dibentuk menjadi sistem tereduksi $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ yang mempunyai orde 7. Berikut ini merupakan sistem tereduksi $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$

$$\tilde{A}_{sr} = \begin{pmatrix} 0.3790 & 0.1058 & -0.0131 & 0.0006 & 0.00001 & -0.000001 & 0.00000001 \\ 1.3953 & 0.5012 & 0.1156 & -0.0113 & 0.000260 & 0.000011 & -0.00000037 \\ -1.8159 & 1.2108 & 0.4674 & 0.1003 & -0.00572 & 0.000022 & 0.00000390 \\ 1.2051 & -1.7042 & 1.4442 & 0.3798 & 0.08268 & -0.002559 & -0.00001870 \\ 0.6950 & 0.8487 & -1.7836 & 1.7902 & 0.293292 & 0.0663060 & -0.00101006 \\ -2.1889 & 1.1693 & 0.2284 & -1.7921 & 2.14397 & 0.208082 & 0.05126747 \\ 0.9603 & -1.9508 & 1.9572 & -0.6509 & -1.62329 & 2.548140 & 0.12133406 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}_{sr} = \begin{pmatrix} -1.3229 \\ 1.1438 \\ -0.4755 \\ -0.6681 \\ 1.4845 \\ -0.7348 \\ -1.0675 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C}_{sr} = \begin{pmatrix} -0.2858 & 0.0187 & -0.0007 & -0.000072 & 0.000007 & -0.0000001 & -0.000000003 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{D}_{sr} = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$$

Kemudian dicek sifat-sifat sistemnya yang meliputi kestabilan, keterkendalian, dan keteramatan. Kestabilan dari sistem tereduksi orde 7 $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ dapat ditentukan berdasarkan nilai λ dari sistem tereduksi $(\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr})$ seperti yang disajikan pada Tabel 4.45 berikut.

Tabel 4.45: Nilai Eigen dari Sistem Tereduksi Orde 7

i	$ \lambda_i $
1	0.5070
2	0.2478
3	0.1073
4	0.4510
5	0.7073
6	0.8717
7	0.9675

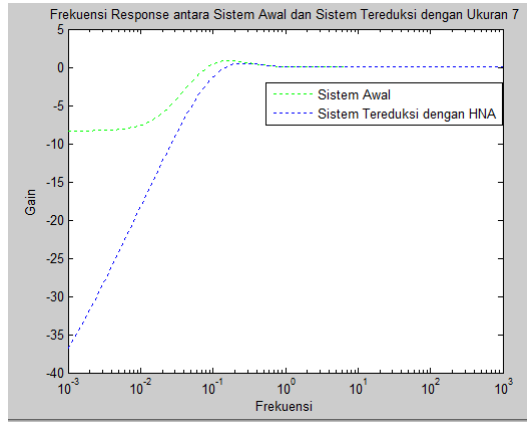
Berdasarkan Tabel 4.45, terlihat bahwa nilai absolut dari eigen matriks \tilde{A}_{sr} seluruhnya mempunyai nilai kurang dari 1, sehingga berdasarkan **Teorema 2.2.1** sistem tereduksi Orde 7 ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) adalah sistem yang stabil asimtotik.

Kemudian dicek mengenai sifat keterkendalian dari sistem tereduksi ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$). Keterkendalian sistem tereduksi orde 7 ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian \tilde{M}_c . Untuk mendapatkan *rank* dari matriks keterkendalian \tilde{M}_c dapat digunakan software MATLAB R2013a, sehingga didapatkan *rank* dari matriks keterkendalian \tilde{M}_c pada sistem tereduksi orde 7 ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) adalah 7. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.2** sistem tereduksi orde 4 ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) adalah terkendali.

Kemudian dicek mengenai sifat keteramatan dari sistem tereduksi ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$). Keteramatan sistem tereduksi orde 7 ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan \tilde{M}_o . Untuk mendapatkan *rank* dari matriks keteramatan \tilde{M}_o dapat digunakan software MATLAB R2013a, sehingga didapatkan *rank* dari matriks keteramatan \tilde{M}_o pada sistem tereduksi orde 7 ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) adalah 7. Maka berdasarkan **Teorema 2.2.3** sistem tereduksi orde

7 ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) adalah teramati.

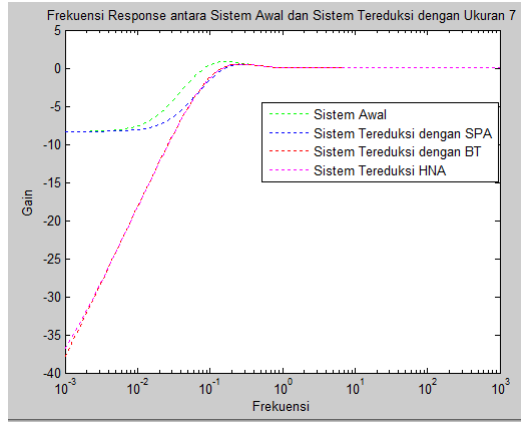
Kemudian berikut ini disajikan grafik frekuensi response antara sistem awal dengan sistem tereduksi orde 7 ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) dengan metode HNA seperti yang disajikan pada Gambar 4.23 berikut.



Gambar 4.23: Frekuensi Response antara Sistem Awal dan Sistem Tereduksi Orde 7 dengan HNA

Berdasarkan gambar 4.23, dapat dilihat bahwa ketika frekuensi rendah sistem tereduksi orde 7 ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) dengan HNA mempunyai frekuensi cenderung menjauhi sistem awal (A_s, B_s, C_s, D_s). Sedangkan ketika frekuensi tinggi sistem tereduksi orde 7 ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) dengan HNA cenderung mendekati sistem awal (A_s, B_s, C_s, D_s).

Kemudian dilakukan perbandingan frekuensi respons antara sistem awal dengan sistem tereduksi dengan metode HNA, SPA dan BT.

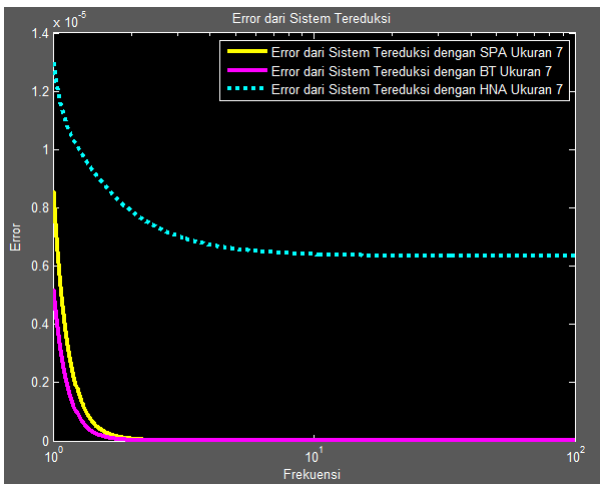


Gambar 4.24: Frekuensi Response antara Sistem Awal dan Sistem Tereduksi Orde 7 dengan HNA, BT, dan SPA

Pada Gambar 4.24, terlihat bahwa sistem tereduksi orde 7 ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) dengan HNA dan BT ketika frekuensi rendah memiliki frekuensi yang cenderung menjauhi sistem awalnya. Namun sistem tereduksi orde 7 ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) dengan SPA ketika frekuensi rendah memiliki frekuensi yang cenderung mendekati sistem awalnya. Sedangkan pada saat frekuensi tinggi sistem tereduksi dengan menggunakan HNA, BT, dan SPA ($\tilde{A}_{sr}, \tilde{B}_{sr}, \tilde{C}_{sr}, \tilde{D}_{sr}$) orde 7 mempunyai frekuensi respon yang mendekati sistem awal (A_s, B_s, C_s, D_s).

Error dari Sistem Tereduksi Orde 7

Perbandingan dari error reduksi model menggunakan HNA dan reduksi model menggunakan BT dan SPA terhadap sistem awal dapat dilihat melalui grafik yang disajikan pada Gambar 4.25 berikut.



Gambar 4.25: Error Sistem Tereduksi Orde 7

Berdasarkan Gambar 4.25, sehingga dapat disajikan nilai error dari sistem tereduksi orde 7 dalam bentuk Tabel 4.46 sebagai berikut.

Tabel 4.46: Error dari Sistem Tereduksi Orde 7

Frekuensi	SPA	HNA	BT
1	0.0000085933210	0.0000129940	0.0000052
10	0.000000000182	0.0000063992	0.000000000019
100	0.0000000000385	0.0000063371	0.0000000000008

Dari Tabel 4.50, dapat dilihat bahwa error sistem tereduksi dengan BT dan SPA pada frekuensi rendah hingga tinggi memiliki error yang lebih kecil daripada error sistem tereduksi dengan HNA.

BAB V

PENUTUP

Pada bab ini, diberikan kesimpulan yang diperoleh dari Tugas Akhir serta saran untuk penelitian selanjutnya.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan analisis dan pembahasan yang telah disajikan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut :

1. Proses reduksi model dengan HNA diawali dengan sistem awal yang stabil, terkendali dan teramati. Kemudian dilakukan pembentukan sistem setimbang. Setelah itu dilakukan dekomposisi sistem dengan melakukan partisi pada nilai singular hankel. Setelah itu dilakukan reduksi model dengan HNA.
2. Berdasarkan analisis sistem beberapa simulasi dan studi kasus sistem konduksi panas, dapat disimpulkan bahwa sistem tereduksi akan memiliki performansi dan sifat yang sama dengan sistem awal yaitu stabil, terkendali, dan teramati.
3. Berdasarkan analisis simulasi dengan beberapa matriks A yang berbeda didapatkan hasil bahwa metode HNA cocok digunakan pada sistem dengan frekuensi yang tinggi karena menghasilkan akurasi yang besar dan waktu yang cepat. Namun matriks A yang berbentuk segitiga atas, reduksi model dengan HNA cocok

digunakan pada sistem dengan frekuensi yang rendah.

5.2 Saran

Pada Tugas Akhir ini hanya dibahas mengenai sistem awal yang stabil, terkendali, dan teramati beserta aplikasinya. Untuk selanjutnya, dapat dikembangkan reduksi model untuk sistem yang tak stabil, terkendali, dan teramati beserta aplikasinya.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Arif, D.K. 2014. *"Konstruksi dan Implementasi Algoritma Filter Kalman pada Model Tereduksi"*. Disertasi S3. Jurusan Matematika FMIPA UGM. Yogyakarta.
- [2] Fadhilah, H.N. 2016. *Analisis Reduksi Model pada Sistem Linier Waktu Diskrit Tak Stabil dengan Metode Singular Perturbation Approximation*. Skripsi S1. Jurusan Matematika FMIPA ITS. Surabaya.
- [3] Khasanah, I.N. 2016. *"Analisis Reduksi Model pada Sistem Linier Waktu Diskrit Tak Stabil"*. Skripsi S1. Jurusan Matematika FMIPA ITS. Surabaya.
- [4] Subiono. 2013. *Sistem Linear dan Kontrol Optimal*. Surabaya: Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
- [5] Ogata, K. 1995. *"Discrete-time Control Systems"*. Canada : Prentice-Hall International, Inc.
- [6] Khasanah, I.N. 2016. *"Analisis Reduksi Model pada Sistem Linier Waktu Diskrit Tak Stabil"*. Skripsi S1. Jurusan Matematika FMIPA ITS. Surabaya.
- [7] Kumar D, et al. 2011. *"Reduction Of Unstable Discrete Time System by Hankel Norm Approximation"*. International Journal of Engineering Science and Technology (IJEST), Vol. 3, pp. 2825-2831.

- [8] Zhou, K. (1996). *Robust and Optimal Control*. New Jersey : Prentice-Hall
- [9] Widodo, B. 2012. *Pemodelan Matematika*. Surabaya: ITS Press
- [10] Triatmodjo, B. 2002. *Metode Numerik*. Yogyakarta: Beta Offset

LAMPIRAN A

Sistem Awal Matriks Diagonal

$$A = \begin{pmatrix} 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0.9 \\ 0.8 \\ 0.7 \\ 0.6 \\ 0.5 \\ 0.4 \\ 0.3 \\ 0.2 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

$$C = (1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)$$

$$D = (1)$$

Syarat Sistem Tereduksi dengan HNA

<u>Orde</u>	$\ G_s - G_{gr}\ _\infty$	σ_{r+1}	$\ G_s - G_{gr}\ _\infty \geq \sigma_{r+1}$	<u>waktu</u>
1	2.282050094	1.183342195	Memenuhi	0.040915
2	0.337368087	0.117810752	Memenuhi	0.011248
3	0.036027865	0.009717115	Memenuhi	0.00775
4	0.002732448	0.000647054	Memenuhi	0.008926
5	0.000150108	0.0000336069	Memenuhi	0.009209
6	5.8763E-06	0.00000128562	Memenuhi	0.008579
7	1.49718E-07	0.000000032423	Memenuhi	0.00833
8	3.99712E-07	0.00000000406903	Memenuhi	0.063845

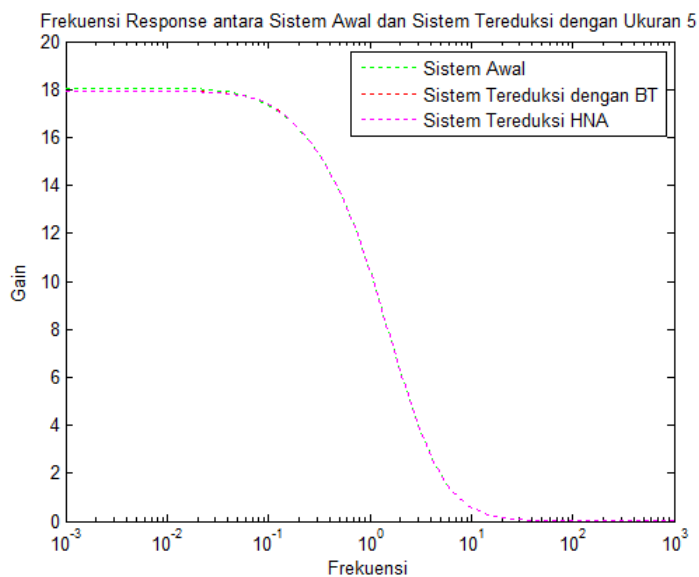
Syarat Sistem Tereduksi dengan BT

Orde	$\ G_s - G_{sr}\ _\infty$	$2(\sigma_{r+1} + \dots + \sigma_n)$	$\ G_s - G_{sr}\ _\infty \leq 2(\sigma_{r+1} + \dots + \sigma_n)$	waktu
1	2.249103	2.623104081	Tidak Memenuhi	0.010615
2	0.212162	0.256419692	Tidak Memenuhi	0.011974
3	0.016634	0.020798188	Memenuhi	0.01005
4	0.001056	0.001363958	Memenuhi	0.010706
5	0.0000524	0.0000698506	Memenuhi	0.010153
6	0.00000194	0.0000026369	Memenuhi	0.010381
7	0.000000283	0.0000000656598	Memenuhi	0.01079
8	0.0000000414	0.00000000813806	Memenuhi	0.01044

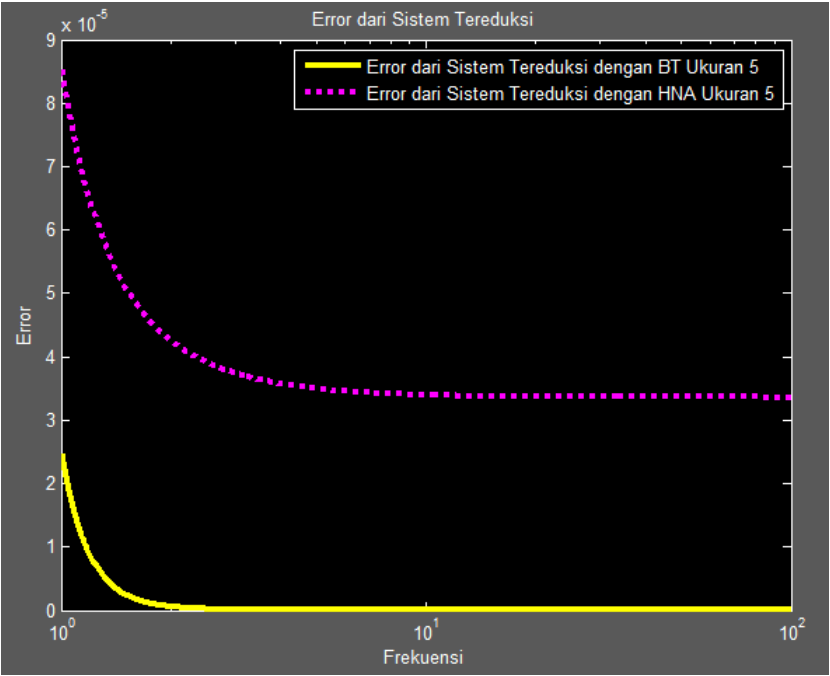
Syarat Sistem Tereduksi dengan SPA

Orde	$\ G_s - G_{sr}\ _\infty$	$2(\sigma_{r+1} + \dots + \sigma_n)$	$\ G_s - G_{sr}\ _\infty \leq 2(\sigma_{r+1} + \dots + \sigma_n)$	waktu
1	3.481805	2.623104081	Tidak Memenuhi	0.015077
2	0.364926	0.256419692	Tidak Memenuhi	0.013377
3	0.031444	0.020798188	Tidak Memenuhi	0.00958
4	0.002171	0.001363958	Tidak Memenuhi	0.009814
5	0.000116	0.0000698506	Tidak Memenuhi	0.009773
6	0.00000458	0.0000026369	Tidak Memenuhi	0.010184
7	0.000000285	0.0000000656598	Tidak Memenuhi	0.009753
8	0.000000186	0.00000000813806	Tidak Memenuhi	0.010439

Frekuensi Respon Sistem Tereduksi Orde 5



Error Sistem Tereduksi Orde 5



LAMPIRAN B

Sistem Awal Matriks Segitiga Atas

$$A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.6 & 0.9 & 0.4 & 0.9 & 0.8 & 0.1 \\ 0 & 0.4 & 0.3 & 0.8 & 0.4 & 0.7 & 0.2 & 0.3 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.2 & 0.5 & 0.1 & 0.7 & 0.9 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9 & 0.5 & 0.2 & 0.7 & 0.4 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0.7 & 0.3 & 0.1 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0.9 & 0.1 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.7 \\ 0.6 \\ 0.8 \\ 0.9 \\ 0.4 \\ 0.2 \\ 0.1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

$$C = (1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)$$

$$D = (1)$$

Syarat Sistem Tereduksi dengan HNA

Orde	$\ G_s - G_{gr}\ _\infty$	σ_{r+1}	$\ G_s - G_{gr}\ _\infty \geq \sigma_{r+1}$	waktu
1	1768.351472238430	146.9892945	Memenuhi	0.069822
2	52.358716981915	14.4079788	Memenuhi	0.021929
3	2.159387124324	0.834693214	Memenuhi	0.005217
4	0.028693733377	0.007537403	Memenuhi	0.009064
5	0.018511999751	0.003233444	Memenuhi	0.00918
6	0.000165606	0.0000723952	Memenuhi	0.008443
7	0.0000707156	0.0000147908	Memenuhi	0.010744
8	0.0000150324	0.00000315233	Memenuhi	0.01133

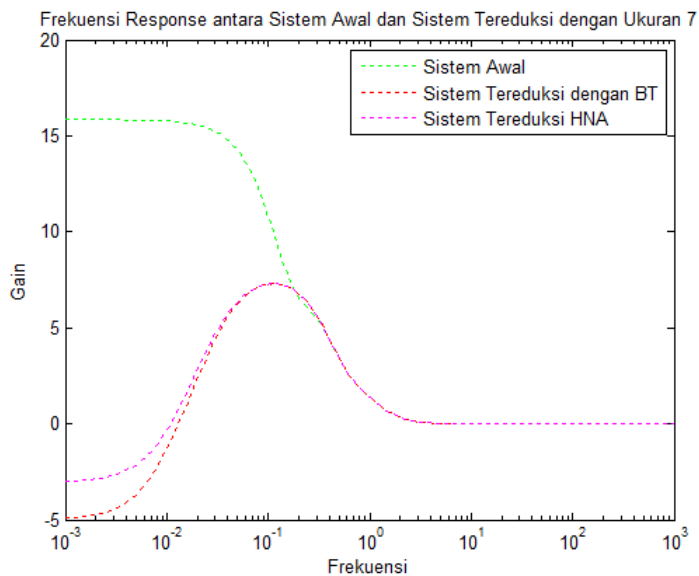
Syarat Sistem Tereduksi dengan BT

Orde	$\ G_s - G_{gr}\ _\infty$	$2(\sigma_{r+1} + \dots + \sigma_n)$	$\ G_s - G_{gr}\ _\infty \leq 2(\sigma_{r+1} + \dots + \sigma_n)$	waktu
1	250.263957450548	324.4856554	Memenuhi	0.027549
2	22.531157973906	30.5070664	Memenuhi	0.046252
3	1.141898800030	1.691108799	Memenuhi	0.010557
4	0.008076479871	0.021722372	Memenuhi	0.015174
5	0.005233093612	0.006647565	Memenuhi	0.009135
6	0.0000923057	0.000180677	Memenuhi	0.011678
7	0.0000202866	0.0000358864	Memenuhi	0.008617
8	0.0000047727	0.00000630467	Memenuhi	0.011321

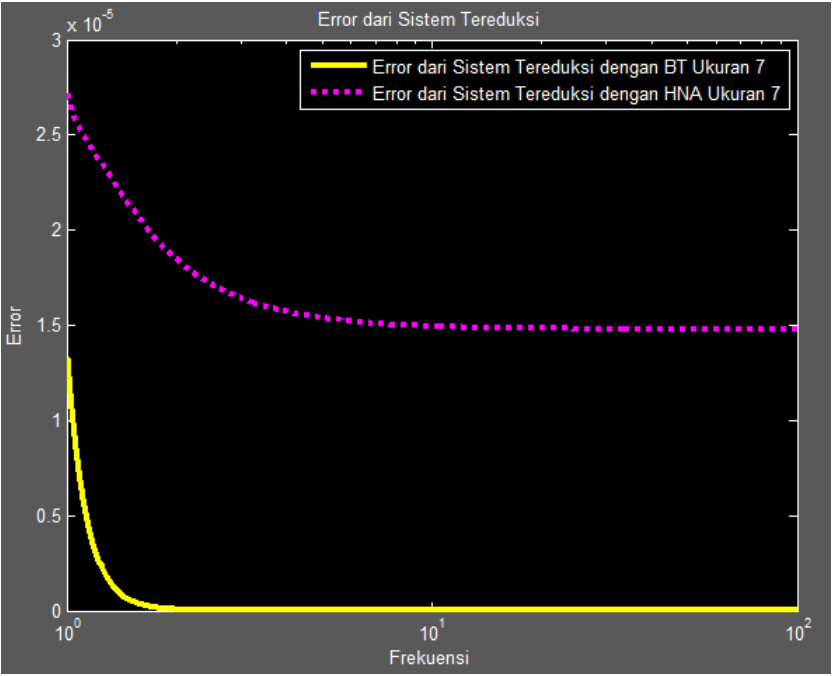
Syarat Sistem Tereduksi dengan SPA

Orde	$\ G_s - G_{gr}\ _\infty$	$2(\sigma_{r+1} + \dots + \sigma_n)$	$\ G_s - G_{gr}\ _\infty \leq 2(\sigma_{r+1} + \dots + \sigma_n)$	Waktu
1	339.663257616466	324.4856554	Tidak Memenuhi	0.015077
2	30.327052095691	30.5070664	Memenuhi	0.013377
3	5.979770509577	1.691108799	Tidak Memenuhi	0.00958
4	0.186310993993	0.021722372	Tidak Memenuhi	0.009814
5	0.008539706947	0.006647565	Tidak Memenuhi	0.009773
6	0.002887032	0.000180677	Memenuhi	0.010184
7	0.00017508	0.0000358864	Tidak Memenuhi	0.009753
8	0.0000111955	0.00000630467	Tidak Memenuhi	0.010439

Frekuensi Respon Sistem Tereduksi Orde 7



Error Sistem Tereduksi Orde 7



LAMPIRAN C

Sistem Awal Matriks Segitiga Bawah

$$A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0.1 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 & 0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.8 & 0.7 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.9 & 0.1 & 0.3 & 0.8 & 0.9 & 0.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.6 & 0.6 & 0.9 & 0.9 & 0.7 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.7 & 0.5 & 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.3 & 0.5 & 0 \\ 0.4 & 0.1 & 0.9 & 0.3 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.8 & 0.8 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.7 \\ 0.6 \\ 0.8 \\ 0.9 \\ 0.4 \\ 0.2 \\ 0.1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

$$C = (1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)$$

$$D = (1)$$

Syarat Sistem Tereduksi dengan HNA

Orde	$\ G_s - G_{sr}\ _\infty$	σ_{r+1}	$\ G_s - G_{sr}\ _\infty \geq \sigma_{r+1}$	waktu
1	2363.244	204.9347	Memenuhi	0.056914
2	65.50227	18.79736	Memenuhi	0.026044
3	0.978898	0.507926	Memenuhi	0.009123
4	0.195464	0.053861	Memenuhi	0.010062
5	0.006232	0.001986	Memenuhi	0.008651
6	0.003986	0.001266	Memenuhi	0.007868
7	0.0000925	0.0000193	Memenuhi	0.009486
8	0.000000745	0.000000157	Memenuhi	0.012012

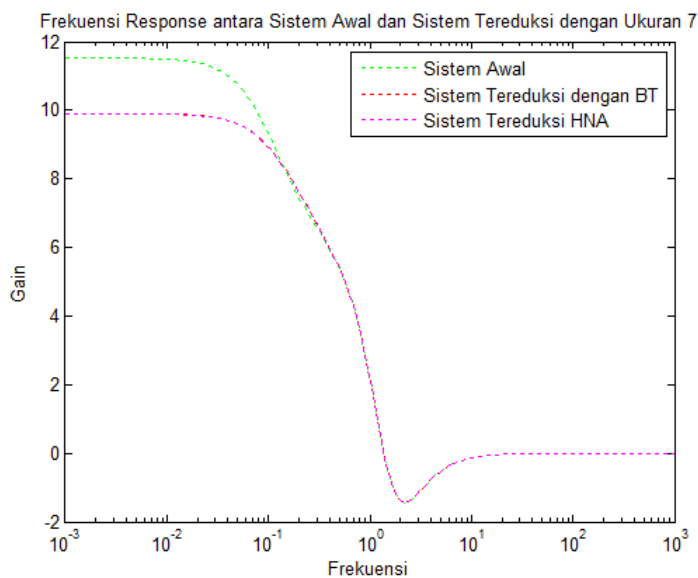
Syarat Sistem Tereduksi dengan BT

Orde	$\ G_s - G_{sr}\ _\infty$	$2(\sigma_{r+1} + \dots + \sigma_n)$	$\ G_s - G_{sr}\ _\infty \leq 2(\sigma_{r+1} + \dots + \sigma_n)$	waktu
1	350.6819603	448.5941898	Memenuhi	0.023268
2	30.04965407	38.72483117	Memenuhi	0.032226
3	0.783861006	1.130117003	Memenuhi	0.011897
4	0.057494469	0.114265206	Memenuhi	0.011953
5	0.002650969	0.006542986	Memenuhi	0.012359
6	0.002115934	0.002571167	Memenuhi	0.011283
7	0.0000223402	0.0000389386	Memenuhi	0.010099
8	0.000000180904	0.000000313791	Memenuhi	0.009869

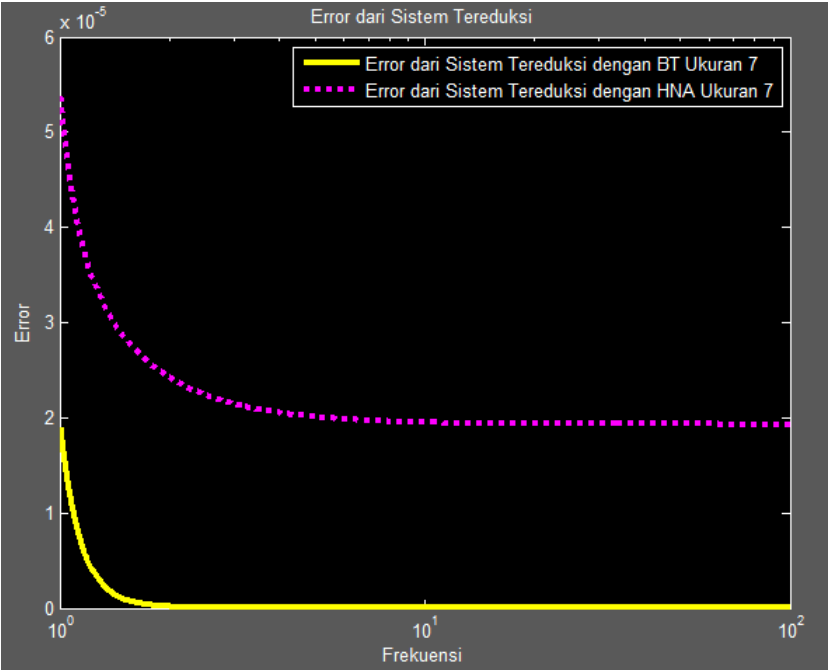
Syarat Sistem Tereduksi dengan SPA

Orde	$\ G_s - G_{sr}\ _\infty$	$2(\sigma_{r+1} + \dots + \sigma_n)$	$\ G_s - G_{sr}\ _\infty \leq 2(\sigma_{r+1} + \dots + \sigma_n)$	waktu
1	455.3175798	448.5941898	Tidak Memenuhi	0.028702
2	52.4681809	38.72483117	Tidak Memenuhi	0.067131
3	1.362629008	1.130117003	Tidak Memenuhi	0.011888
4	2.338837542	0.114265206	Tidak Memenuhi	0.010257
5	0.006523459	0.006542986	Memenuhi	0.009597
6	0.003465464	0.002571167	Tidak Memenuhi	0.010138
7	0.000114516	0.0000389386	Tidak Memenuhi	0.011558
8	0.00000125472	0.000000313791	Tidak Memenuhi	0.012249

Frekuensi Respon Sistem Tereduksi Orde 7



Error Sistem Tereduksi Orde 7



LAMPIRAN D

Listing Program

Pembentukan Matriks Diagonal

```
%% INPUT NILAI AWAL (INISIALISASI)
disp('####INPUT NILAI AWAL MATRIKS A DIAGONAL(INISIALISASI)####');
disp('Inputkan nilai sedemikian hingga sistem memenuhi syarat');
disp('Untuk dapat diketahui (stabil, takstabil, & takawal) : ');
n=input('masukkan besar matriks orde (n) yang diinginkan = ');
%% PEMBENTUKAN SISTEM AWAL, MATRIKS (A,B,C,D)
disp('1. PEMBENTUKAN SISTEM AWAL');
disp('PEMBENTUKAN MATRIKS A DIAGONAL');
%% Matriks A = matriks diagonal berukuran n x n
A=zeros(n,n);
for i=1:n
    alpha = input('masukkan nilai parameter yang diinginkan = ');
    A(i,i)=alpha;
end
disp('matriks A DIAGONAL= ');
disp(A);
%% Matriks B = matriks koefisien variabel input berukuran n x 1
disp('Pembentukan matriks B')
B=zeros(n,1);
k = input('masukkan baris ke berapa yang akan dimasukkan parameter = ');
while abs(k) < (n+1)
    alpha = input('masukkan nilai parameter yang diinginkan = ');
    B(k,1)=alpha;
    k = input('masukkan baris ke berapa yang akan dimasukkan parameter = ');
end
disp('matriks B = ');
disp(B);
%% Matriks c = matriks koefisien variabel input berukuran 1 x n
disp('Pembentukan matriks C')
C=zeros(1,n);
j = input('masukkan kolom ke berapa yang akan di inputkan nilai = ');
while abs(j) < (n+1)
    C(1,j)= 1;
    j = input('masukkan kolom ke berapa yang akan di inputkan nilai = ');
end
disp('matriks C = ');
disp(C);
%% Matriks D
D=1;
disp('matriks D = ');
disp(D);
```

Pembentukan Matriks Segitiga Atas

```

%% INPUT NILAI AWAL (INISIALISASI)
disp('####INPUT NILAI AWAL MATRIKS A DIAGONAL(INISIALISASI)####');
disp('Jumlahkan nilai sedemikian hingga sistem persamaan diatas');
disp('untuk dapat diperoleh (stabil, terkendali, & teraman) : ');
n=input('masukkan besar matriks order(n) yang diinginkan = ');
%% PEMBENTUKAN SISTEM AWAL, MATRIKS (A,B,C,D)
disp('I. PEMBENTUKAN SISTEM AWAL');
disp('PEMBENTUKAN MATRIKS A Segitiga Atas');
%% Matriks A = matriks segitiga atas berukuran n x n
A=zeros(n,n);
for j=1:n
    for i=1:n
        if n+1>(i+j)
            alpha = input('masukkan nilai parameter yang diinginkan = ');
            A(i,j+i)=alpha;
        end
    end
end
% untuk yang penguatan diagonalnya
for i=1:n
    disp('masukkan parameter untuk pembastukan nilai pada diagonal utama');
    alpha = input('masukkan nilai parameter yang diinginkan = ');
    A(i,i)=alpha;
end
disp('matriks A segitiga atas')
disp(A);
%% Matriks B = matriks koefisien variabel input berukuran n x 1
disp('Pembentukan matriks B')
B=zeros(n,1);
k = input('masukkan baris ke berapa yang akan dimasukkan parameter = ');
while abs(k) < (n+1)
    alpha = input('masukkan nilai parameter yang diinginkan = ');
    B(k,1)=alpha;
    k = input('masukkan baris ke berapa yang akan dimasukkan parameter = ');
end
disp('matriks B = ');
disp(B);
%% Matriks c = matriks koefisien variabel input berukuran 1 x n
disp('Pembentukan matriks C')
C=zeros(1,n);
j = input('masukkan kolom ke berapa yang akan di inputkan nilai = ');
while abs(j) < (n+1)
    C(1,j)=1;
    j = input('masukkan kolom ke berapa yang akan di inputkan nilai = ');
end
disp('matriks C = ');
disp(C);
%% Matriks D
D=1;
disp('matriks D = ');
disp(D);

```

Pembentukan Matriks Segitiga Bawah

```

%% INPUT NILAI AWAL (INISIALISASI)
disp('####INPUT NILAI AWAL MATRIKS A DIAGONAL(INISIALISASI)####');
disp('Pembentukan Matriks Segitiga Bawah Sistem Konduksi Panas');
disp('Untuk dapat dilakukan (akibat, sekondari, & tertamati) : ');
n=input('Masukkan baris matriks orde(n) yang diinginkan = ');
%% PEMBENTUKAN SISTEM AWAL, MATRIKS (A,B,C,D)
disp('I. PEMBENTUKAN SISTEM AWAL SISTEM KONDUKSI PANAS');
disp('PEMBENTUKAN MATRIKS A Segitiga Bawah');
%% Matriks A = matriks segitiga bawah berukuran n x n
A=zeros(n,n);
for j=1:n
    for i=1:n
        if n+1>(i+j)
            alpha = input('Masukkan nilai parameter yang diinginkan = ');
            A(i,j)=alpha;
        end
    end
end
% untuk yang pembuatan diagonalnya
for i=1:n
    disp('Masukkan parameter untuk pembentukan nilai pada diagonal utama');
    alpha = input('Masukkan nilai parameter yang diinginkan = ');
    A(i,i)=alpha;
end
disp('matriks A Segitiga Bawah = ');
disp(A);
%% Matriks B = matriks koefisien variabel input berukuran n x 1
disp('Pembentukan matriks B');
B=zeros(n,1);
k = input('Masukkan baris ke berapa yang akan dimasukkan parameter = ');
while abs(k) < (n+1)
    alpha = input('Masukkan nilai parameter yang diinginkan = ');
    B(k,1)=alpha;
    k = input('Masukkan baris ke berapa yang akan dimasukkan parameter = ');
end
disp('matriks B = ');
disp(B);
%% Matriks c = matriks koefisien variabel input berukuran 1 x n
disp('Pembentukan matriks C');
C=zeros(1,n);
j = input('Masukkan kolom ke berapa yang akan di inputkan nilai = ');
while abs(j) < (n+1)
    C(1,j) = 1;
    j = input('Masukkan kolom ke berapa yang akan di inputkan nilai = ');
end
disp('matriks C = ');
disp(C);
%% Matriks D
D=1;

```

Pembentukan Matriks Tridiagonal

```

%% INPUT NILAI AWAL (INISIALISASI)
disp('####INPUT NILAI AWAL MATRIKS A DIAGONAL(INISIALISASI)####');
disp('Masukkan nilai awal sistem dengan sistem persamaan ');
disp('untuk dapat diketahui (skala, sekunder, & seterusnya) : ');
n=input('masukkan besar matriks orde(n) yang diinginkan = ');
%% PEMBENTUKAN SISTEM AWAL, MATRIKS (A,B,C,D)
disp('I. PEMBENTUKAN SISTEM AWAL');
disp('PEMBENTUKAN MATRIKS A Tridiagonal');
%% Matriks A = matriks segitiga bawah berukuran n x n
A=zeros(n,n);
for i=1:n-1
    alpha = input('masukkan nilai parameter yang diinginkan = ');
    A(i+1,i)=alpha;
    alpha = input('masukkan nilai parameter yang diinginkan = ');
    A(i,i+1)=alpha;
end
%untuk yang pembuatan diagonalnya
for i=1:n
    disp('masukkan parameter untuk pembentukan nilai pada diagonal utama');
    alpha = input('masukkan nilai parameter yang diinginkan = ');
    A(i,i)=alpha;
end
disp('matriks A Tridiagonal= ');
disp(A);
%% Matriks B = matriks koefisien variabel input berukuran n x 1
disp('Pembentukan matriks B')
B=zeros(n,1);
k = input('masukkan baris ke berapa yang akan dimasukkan parameter = ');
while abs(k) < (n+1)
    alpha = input('masukkan nilai parameter yang diinginkan = ');
    B(k,1)=alpha;
    k = input('masukkan baris ke berapa yang akan dimasukkan parameter = ');
end
disp('matriks B = ');
disp(B);
%% Matriks c = matriks koefisien variabel input berukuran 1 x n
disp('Pembentukan matriks C')
C=zeros(1,n);
j = input('masukkan kolom ke berapa yang akan di inputkan nilai = ');
while abs(j) < (n+1)
    C(1,j)= 1;
    j = input('masukkan kolom ke berapa yang akan di inputkan nilai = ');
end
disp('matriks C = ');
disp(C);
%% Matriks D
D=1;
disp('matriks D = ');
disp(D);

```

Proses Reduksi Model

```

%% Analisis sifat-sifat sistem awal(A,B,C,D)
%cek Kestabilan
disp('Cek Kestabilan');
Eigen_A=abs(eig(A));
%inisiasi, jumlah eigen stabil dan tidak stabil
Tidak_Stabil = 0;
Stabil = 0;
Stabil_Asimptotik = 0;
for i = 1:n
    if real(Eigen_A(i)) > 1
        Tidak_Stabil = Tidak_Stabil +1;
    end
    if real(Eigen_A(i)) < 1
        Stabil_Asimptotik = Stabil_Asimptotik +1;
    end
    if real(Eigen_A(i)) == 1
        Stabil = Stabil +1;
    end
end
Stabil=Stabil+Stabil_Asimptotik;
Tidak_Stabil
Stabil

%Keterkendalian dan keteramatan sistem awal
Mc=ctrb(A,B);
Mo=obsv(A,C);
disp('rank matriks A = ');
disp(rank(A));
disp('rank matriks keterkendalian (Mc) = ');
disp(rank(Mc));
disp('rank matriks keteramatan (Mo) = ');
disp(rank(Mo));
if rank(A)==rank(Mc)
    if rank(A)==rank(Mo)
        disp('rank A = rank Mc = rank Mo');
        disp('SISTEM TERKENDALI DAN TERAMATI');
    else
        disp('rank A = rank Mc, rank A /= rank Mo');
        disp('sistem terkendali namun tidak teramati');
    end
elseif rank(A)==rank(Mo)
    disp('rank A /= rank Mc, rank A = rank Mo');
    disp('sistem tidak terkendali namun teramati');
else
    disp('rank A /= rank Mc /= rank Mo');
    disp('sistem tidak terkendali dan tidak teramati');
end

```

```

%% Pembentukan Sistem A,B,C,D dan fungsi transfer A,B,C,D
SysAwal = ss(A,B,C,D,1);
G_Awal = tf(SysAwal)
%% pembentukan gramian keterkendalian dan keteramatan sistem awal (A,B,C,D)
W=gram(SysAwal,'c');
disp('gramian keterkendalian (W) = ');
disp(W);
M=gram(SysAwal,'o');
disp('gramian keteramatan (M) = ');
disp(M);
if(det(W)>0)
disp('GRAMIAN W DEFINIT POSITIF');
else
error('gramian W tidak definit positif','tidak terkendali');
end
if(det(M)>0)
disp('GRAMIAN M DEFINIT POSITIF');
else
error('gramian M tidak definit positif','tidak teramat');
end

%% Tahap pembentukan Matriks Transformasi T
% mencari matriks psi
disp('Pembentukan Matriks Transformasi T')
Psi = chol(W);
cekW=Psi'*Psi;
disp('matriks Psi = ');
disp(Psi);
% Dikonstruksikan matriks psi*M*psi transpose untuk menentukan matriks uniter
U
disp('diagonalisasi Psi*M*Psitrans sedemikian hingga
Psi*M*Psitrans=U*(Sigma^2)*Utrans');
Z=Psi*M*Psi';
[U,L,U]=svd(Z);
cekz=U*L*U';
sigma=(L).^(1/2);
% Matriks transformasi T
disp('pembentukan matriks transformasi T');
T=Psi'*U*(sigma).^(-0.5);
disp('matriks T = ');
disp(T);

```



```

%% Tahap pembentukan Sistem Setimbang
% Sistem Setimbang
disp('Pembentukan Sistem Setimbang');
At=inv(T)*SysAwal.a*T;
disp('matriks A tilda (At) = ');
disp(At);
Bt=inv(T)*SysAwal.b;
disp('matriks B tilda (Bt) = ');
disp(Bt);
Ct=SysAwal.c*T;
disp('matriks C tilda (Ct) = ');
disp(Ct);
Dt=SysAwal.d;
disp('matriks D tilda (Dt) = ');
disp(Dt);

%% fungsi transfer sistem setimbang
Sys_Setimbang=ss(At,Bt,Ct,Dt,1);
G_setimbang = tf(Sys_Setimbang);

%% Analisis sifat-sifat sistem setimbang
% cek kestabilan
disp('Cek Kestabilan');
Eigen_A_setimbang = abs(eig(At));
disp('nilai eigen A sistem setimbang');
disp(Eigen_A_setimbang)
Mc_setimbang=ctrb(At,Bt);
Mo_setimbang=obsv(At,Ct);
disp('rank matriks A setimbang = ');
disp(rank(At));
disp('rank matriks keterkendalian (Mc setimbang) = ');
disp(rank(Mc_setimbang));
disp('rank matriks keteramatan (Mo setimbang) = ');
disp(rank(Mo_setimbang));
if rank(At)==rank(Mc_setimbang)
if rank(At)==rank(Mo_setimbang)
disp('rank A setimbang = rank Mc setimbang = rank Mo setimbang');
disp('SISTEM TERKENDALI DAN TERAMATI');
else
disp('rank A setimbang = rank Mc setimbang, rank A setimbang /= rank Mo setimbang');
disp('sistem terkendali namun tidak teramati');
end
elseif rank(At)==rank(Mo_setimbang)
disp('rank A setimbang /= rank Mc setimbang, rank A setimbang = rank Mo setimbang');
disp('sistem tidak terkendali namun teramati');
else
disp('rank A setimbang /= rank Mc setimbang /= rank Mo setimbang');
disp('sistem tidak terkendali dan tidak teramati');
end

```

```

%% cek gramian keterkendalian dan gramian keterkontrolan
W_Setimbang = gram(Sys_Setimbang,'c');
%disp('gramian keterkendalian (W_setimbang) = ');
%disp(W_Setimbang);
M_Setimbang = gram(Sys_Setimbang,'o');
% disp('gramian keterkontrolan (M_setimbang) = ');
% disp(M_Setimbang);
if(det(W_Setimbang)>0)
disp('GRAMIAN W DEFINIT POSITIF');
else
errorldg('gramian W tidak definit positif','tidak terkendali');
end
if(det(M_Setimbang)>0)
disp('GRAMIAN M DEFINIT POSITIF');
else
errorldg('gramian M tidak definit positif','tidak teramati');
end
c=fix(abs(W_Setimbang));
d=fix(abs(M_Setimbang));
if(isequal(c,d))
disp('Gramian Keterkendalian Setimbang = Gramian Keteramati Setimbang');
else
errorldg('Gramian Keterkendalian Setimbang TIDAK SAMA dengan Gramian
Keteramati Setimbang','error');
% break;
end
sigma = W_Setimbang;
hsv= hsvd(Sys_Setimbang)
disp('nilai singular hankel = ');
disp(hsv);
%% inputan r (Orde sistem tereduksi)
[p,q]=size(Ar);
disp(['Masukkan ukuran sistem tereduksi(r) yang tidak lebih dari n']);
r=input('r=');

```

```

%% partisi matriks sistem setimbang
A11 = At(1:r,1:r);
A22 = At(r+1:n,r+1:n);
A12 = At(1:r,r+1:n);
A21 = At(r+1:n,1:r);
B1 = Bt(1:r);
B2 = Bt(r+1:n);
C1 = Ct(1:r);
C2 = Ct(r+1:n);
Sigma1 = sigma(1:r,1:r);
Sigma2 = sigma(r+1,r+1);
%% reduksi model dengan HNA
tic
tau = Sigma1^2 - (Sigma2^2*eye(r));
Uniter = -C2*pinv(B2');
At_HNA = inv(tau)*(Sigma2^2*A11'+Sigma1*A11*Sigma1-Sigma2*C1'*Uniter*B1')
Bt_HNA = inv(tau)*(Sigma1*B1+Sigma2*C1'*Uniter)
Ct_HNA = (C1*Sigma1 + Sigma2*Uniter*B1')
Dt_HNA = D - Sigma2*Uniter
Sys_Tereduksi_HNA = ss(At_HNA,Bt_HNA,Ct_HNA,Dt_HNA,1);
G_Tereduksi_HNA = tf(Sys_Tereduksi_HNA);
toc

```

```

%% Analisis sifat-sifat sistem tereduksi HNA
Eigen A tereduksi HNA = abs(eig(At HNA));
disp('nilai eigen A sistem Tereduksi HNA');
disp(Eigen A tereduksi HNA)
Mc tereduksi HNA=ctrb(At HNA,Bt HNA);
Mo tereduksi HNA=obsv(At HNA,Ct HNA);
disp('rank matriks A tereduksi = ');
disp(rank(At HNA));
disp('rank matriks keterkendalian (Mc tereduksi HNA) = ');
disp(rank(Mc tereduksi HNA));
disp('rank matriks keteramatan (Mo tereduksi HNA) = ');
disp(rank(Mo tereduksi HNA));
if rank(At HNA)==rank(Mc tereduksi HNA)
if rank(At HNA)==rank(Mo tereduksi HNA)
disp('rank A tereduksi HNA = rank Mc tereduksi HNA = rank Mo tereduksi HNA');
disp('SISTEM TERKENDALI DAN TERAMATI');
else
disp('rank A tereduksi HNA = rank Mc tereduksi HNA, rank A tereduksi HNA =/
rank Mo tereduksi HNA');
disp('sistem terkendali namun tidak teramati');
end
elseif rank(At HNA)==rank(Mo tereduksi HNA)
disp('rank A tereduksi HNA =/ rank Mc tereduksi HNA, rank A tereduksi HNA =
rank Mo tereduksi HNA');
disp('sistem tidak terkendali namun teramati');
else
disp('rank A tereduksi HNA =/ rank Mc tereduksi HNA =/ rank
Mo tereduksi HNA');
disp('sistem tidak terkendali dan tidak teramati');
end

```

```

%% reduksi model dengan BT
tic
At_BT = A11;
Bt_BT = B1;
Ct_BT = C1;
Dt_BT = D;

Sys_Tereduksi_BT = ss(At_BT,Bt_BT,Ct_BT,Dt_BT,1);
G_Tereduksi_BT = tf(Sys_Tereduksi_BT);
toc

%% Analisis sifat-sifat sistem tereduksi BT
Eigen_A_tereduksi_BT = abs(eig(At_BT));
disp('nilai eigen A sistem tereduksi BT');
disp(Eigen_A_tereduksi_BT);
Mc_tereduksi_BT=ctrb(At_BT,Bt_BT);
Mo_tereduksi_BT=obsv(At_BT,Ct_BT);
disp('rank matriks A tereduksi_BT = ');
disp(rank(At_BT));
disp('rank matriks keterkendalian (Mc tereduksi_BT = ');
disp(rank(Mc_tereduksi_BT));
disp('rank matriks keteramatan (Mo tereduksi_BT = ');
disp(rank(Mo_tereduksi_BT));
if rank(At_BT)==rank(Mc_tereduksi_BT)
if rank(At_BT)==rank(Mo_tereduksi_BT)
disp('rank A tereduksi_BT = rank Mc tereduksi_BT = rank Mo tereduksi_BT');
disp('SISTEM TERKENDALI DAN TERAMATI');
else
disp('rank A tereduksi_BT = rank Mc tereduksi_BT, rank A tereduksi_BT /= rank
Mo tereduksi_BT');
disp('sistem terkendali namun tidak teramati');
end
elseif rank(At_BT)==rank(Mo_tereduksi_BT)
disp('rank A tereduksi_BT /= rank Mc tereduksi_BT, rank A tereduksi_BT = rank
Mo tereduksi_BT');
disp('sistem tidak terkendali namun teramati');
else
disp('rank A tereduksi_BT /= rank Mc tereduksi_BT /= rank Mo tereduksi_BT');
disp('sistem tidak terkendali dan tidak teramati');
end

```

```

%% reduksi model dengan SPA
tic
At_SPA = A11 - (A12*inv(A22)*A21);
Bt_SPA = B1 - (A12*inv(A22)*B2);
Ct_SPA = C1 - (C2*inv(A22)*A21);
Dt_SPA = D - (C2*inv(A22)*B2);
Svs_Tereduksi_SPA = ss(At_SPA,Bt_SPA,Ct_SPA,Dt_SPA,1);
G_Tereduksi_SPA = tf(Svs_Tereduksi_SPA);
toc
%% Analisis sifat-sifat sistem tereduksi HNA
Eigen_A_tereduksi_SPA = abs(eig(At_SPA));
disp('nilai eigen A sistem Tereduksi SPA');
disp(Eigen_A_tereduksi_SPA);
Mc_tereduksi_SPA=ctrlb(At_SPA,Bt_SPA);
Mo_tereduksi_SPA=obsv(At_SPA,Ct_SPA);
disp('rank matriks A tereduksi SPA = ');
disp(rank(At_SPA));
disp('rank matriks keterkendalian (Mc tereduksi SPA) = ');
disp(rank(Mc_tereduksi_SPA));
disp('rank matriks teramati (Mo tereduksi SPA) = ');
disp(rank(Mo_tereduksi_SPA));
if rank(At_SPA)==rank(Mc_tereduksi_SPA)
if rank(At_SPA)==rank(Mo_tereduksi_SPA)
disp('rank A tereduksi SPA = rank Mc tereduksi SPA = rank Mo tereduksi SPA');
disp('SISTEM TERKENDALI DAN TERAMATI');
else
disp('rank A tereduksi SPA = rank Mc tereduksi SPA, rank A tereduksi SPA =/
rank Mo tereduksi SPA');
disp('sistem terkendali namun tidak teramati');
end
elseif rank(At_SPA)==rank(Mo_tereduksi_SPA)
disp('rank A tereduksi SPA =/ rank Mc tereduksi SPA, rank A tereduksi SPA =
rank Mo tereduksi SPA');
disp('sistem tidak terkendali namun teramati');
else
disp('rank A tereduksi SPA =/ rank Mc tereduksi SPA =/ rank
Mo tereduksi SPA');
disp('sistem tidak terkendali dan tidak teramati');
end

%% ERROR SISTEM TEREDUKSI
Error_SPA=G_Awal-G_Tereduksi_SPA;
NormSPA=norm(Error_SPA,inf);
disp('nilai error sistem tereduksi dengan SPA');
disp(NormSPA);
Error_BT=G_Awal-G_Tereduksi_BT;
NormBT=norm(Error_BT,inf);
disp('nilai error sistem tereduksi dengan BT');
disp(NormBT);
Error_HNA=G_Awal-G_Tereduksi_HNA;
NormHNA=norm(Error_HNA,inf);
disp('nilai error sistem tereduksi dengan HNA');
disp(NormHNA);

```

```

% Cek Sifat sistem dapat direduksi dan grafik Ekuivalensi Beban
Sigma_x = h*(r+1);
if Sigma_x < NormHNA
figure(100+r);
t=logspace(-3,3,200);
[magra,phara]=bode(A,B,C,D,1,t);
[magb,pharb]=bode(Ac_HNA,Bc_HNA,Cc_HNA,Dc_HNA,1,t);
semilogx(t,20*log10(mag),'g','b',20*log10(mag),'m');
xlabel('Frekuensi [mag]');
ylabel('num2str(r)');
title('Sifat sistem')
xlabel('Gain')
hold on
end
end
% Distribusi jumlahan dari 2*sigma r+1
Sigma_A = 0;
for i=1:r+1
    Sigma_A=h*(i);
    Sigma_Ai = 2*Sigma_A + Sigma_A;
    Sigma_A = Sigma_Ai;
end
if Sigma_x < NormBT
t=logspace(-3,3,200);
[magra,phara]=bode(Ac_BT,Bc_BT,Cc_BT,Dc_BT,1,t);
[magb,pharb]=bode(Ac_BT,Bc_BT,Cc_BT,Dc_BT,1,t);
semilogx(t,20*log10(magra),'r');
hold on
end
if Sigma_x < NormSFA
t=logspace(-3,3,200);
[magra,phara]=bode(Ac_SFA,Bc_SFA,Cc_SFA,Dc_SFA,1,t);
[magb,pharb]=bode(Ac_SFA,Bc_SFA,Cc_SFA,Dc_SFA,1,t);
semilogx(t,20*log10(magra),'b');
end
if Sigma_x < NormHNA
if Sigma_x < NormBT
if Sigma_x < NormSFA
legend('Sistem Awal','Sistem Tereduksi dengan HNA','Sistem Tereduksi
BT','Sistem Tereduksi SFA');
else
legend('Sistem Awal','Sistem Tereduksi dengan HNA','Sistem
Tereduksi BT');
end
else
legend('Sistem Awal','Sistem Tereduksi dengan HNA')
end
end
end
end

```

```

%% Error Sistem Tereduksi
figure(c);
w=logspace(0,2,500);
P=pck(A,B,C,D);
Pr=pck(Ar,SPA,Bt,SPA,Ct,SPA,Dt,SPA);
Prs=pck(Ar,Bt,Bt,Bt,Ct,Bt,Dt,Bt);
Prsq = pck(Ar,HNA,Bt,HNA,Ct,HNA,Dt,HNA);
Ger=msub(P,Pr);
Ger1=msub(P,Prs);
Ger2=msub(P,Prsq);
Gf1=frsp(Ger,w);
Gf2=frsp(Ger1,w);
Gf3=frsp(Ger2,w);
[u1,s1,v1]=yavd(Gf1);
[u2,s2,v2]=yavd(Gf2);
[u3,s3,v3]=yavd(Gf3);
if Sigma_k~NormHNA
    if sigma_k~NormBT
        if sigma_k~NormSPA
            plot('liye',s1,s2,s3,':');
            set(0,'defaultfigurecolor',[1 1 1])
            a = ['Error dari Sistem Tereduksi dengan SPA Ukuran ' num2str(x)];
            b = ['Error dari Sistem Tereduksi dengan BT Ukuran ' num2str(x)];
            c = ['Error dari Sistem Tereduksi dengan HNA Ukuran ' num2str(x)];
            legend(a,b,c);
        else
            plot('liye',s2,s3,':');
            set(0,'defaultfigurecolor',[1 1 1])
            b = ['Error dari Sistem Tereduksi dengan BT Ukuran ' num2str(x)];
            c = ['Error dari Sistem Tereduksi dengan HNA Ukuran ' num2str(x)];
            legend(b,c);
        end
    else
        plot('liye',s3,':');
        set(0,'defaultfigurecolor',[1 1 1])
        c = ['Error dari Sistem Tereduksi dengan HNA Ukuran ' num2str(x)];
        legend(c);
    end
end
title('Error dari Sistem Tereduksi ')
xlabel('Frekuensi')
ylabel('Error')

```


Biodata Penulis



Penulis bernama Mohammad Khoirul Roziq, lahir di Sidoarjo, 30 Juli 1996. Jenjang pendidikan formal yang ditempuh oleh penulis dimulai dari TK Dharma Wanita Sarirogo (2000-2002), SDN Sarirogo (2002-2008), SMP Negeri 3 Sidoarjo (2008-2011), SMA Negeri 2 Sidoarjo (2011-2014). Setelah lulus dari SMAN 2 Sidoarjo penulis melanjutkan studi ke jenjang S1 di Departemen Matematika ITS pada tahun 2014-sekarang melalui jalur SBMPTN dengan NRP 1214100074. Di Departemen Matematika ITS penulis mengambil Bidang Minat Matematika Terapan. Selain aktif kuliah, penulis juga aktif berorganisasi di KM ITS melalui BEM (Badan Eksekutif Mahasiswa) FMIPA ITS sebagai staff Departemen PSDM (2015-2016), Kepala Divisi pengembangan Departemen PSDM (2016-2017). Kemudian juga aktif sebagai staff Departemen Dana Usaha Lembaga Dakwah Jurusan Ibnu Muqhlah Matematika ITS (2015-2016), Kepala Departemen Dana Usaha pd Lembaga Dakwah Jurusan Ibnu Muqhlah Matematika ITS (2016-2017). Selain itu, penulis juga aktif dalam berbagai acara kemahasiswaan yaitu GERIGI, OMITS, dan dalam pelatihan kemahasiswaan seperti LKMM Pra-TD, LKMM TD.

Informasi lebih lanjut mengenai Tugas Akhir ini dapat ditujukan ke penulis melalui email: *mohammadkhoirulroziq@gmail.com*